现代数学基础丛书 97

代数学中的Frobenius结构

汪明义 著


科学出版社
www.sciencep.com

(O-2235.0101)



销售分类建议：高等数学

ISBN 7-03-015447-9
定 价：40.00 元

现代数学基础丛书 97

代数学中的 Frobenius 结构

汪明义 著

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金的资助:

四川省青年基金
四川省科技厅应用基础研究基金
四川师范大学出版基金

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书共分 12 章，前面 8 章主要论述 Frobenius 结构在一个域上的代数中的运用. 尤其是总结了其一般情形的 Frobenius 环、quasi-Frobenius 环的一系列重大进展. 后面 4 章论述了 Frobenius 结构在一个域上的余代数和 Hopf 代数中的运用，系统地讨论了 Frobenius 余代数、quasi-Frobenius 余代数和 Frobenius Hopf 代数的一系列新进展，特别地还介绍了 Frobenius 代数、Frobenius Lie 代数在求解 Yang-Baxter 方程方面的奇特功效.

本书可供代数学的研究生、数学系高年级本科生、数学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

代数学中的 Frobenius 结构/汪明义 著.—北京：科学出版社，2005
(现代数学基础丛书；97)
ISBN 7-03-015447-9
I. 代… II. 汪… III. 代数-理论 IV. O15
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005) 第 042803 号

责任编辑：张 扬／责任校对：李奕萱
责任印制：钱玉芬／封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2005 年 7 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2005 年 7 月第一次印刷 印张：16
印数：1—2 000 字数：287 000
定价：40.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003年8月

序　言

环论是抽象代数的一个重要组成部分，一个多世纪以来受到了越来越多的数学家的关注. 环论的发展始于有限维代数的研究, 20 世纪 20 年代以来，以 E. Artin 和 E.Noether 为代表的带有限链条件环的研究得到了蓬勃的发展. 自 20 世纪 40 年代以来，以 Jacobson 为代表的不带有限链条件环的结构研究，以及应用模及模范畴和同调代数理论，使一般环的研究走上了更为广阔的发展道路，并取得了更为现代化的成果.

在环论中有一个十分活跃的研究对象，那就是 Frobenius 代数(及其广义形式 quasi-Frobenius 代数)，它在环论发展中的处于重要地位，受到环论学者的重视. 它产生于 20 世纪初，成形于 20 世纪 40 年代，而后便得到了广泛的发展. 在环论中，Frobenius 环与 quasi-Frobenius 环形成了一个十分丰富的研究领域，PF-环理论就是其一个典型代表. 在 20 世纪 80 年代，随着 Hopf 代数研究的深入，人们逐渐注意到 Frobenius 余代数（Hopf 代数）和 quasi-Frobenius 余代数（Hopf 代数）也是具有丰富而又深刻的研究内容的对象. 也是在 20 世纪 80 年代，在 Lie 代数领域出现了 Frobenius Lie 代数这样的研究对象，而 Frobenius Lie 代数在求解 Yang-Baxter 方程方面也显得很有成效. 正如作者在书的前言中所陈述的那样，Frobenius 代数已渗透到了数学的诸多领域.

无论 Frobenius 代数、Frobenius 余代数（Hopf 代数），还有 Frobenius Lie 代数，它们的一个基本特征就是“域上的向量空间具有非退化的双线性型结构”，本书作者抓住这个特征，系统地整理了在代数学的“有限维代数，余代数(Hopf 代数)和有限维 Lie 代数”三个领域中有关这个结构的历史和最新进展，特别是在 quasi-Frobenius 代数和 quasi-Frobenius 环的发展中，他以一系列的著名公开问题研究为线索进行了系统地梳理，同时融入了他本人所取得的相关的系统成果. 这是一部具有创见的著作，相信该书的出版将有助于推动国内对这一领域的研究.

上海复旦大学　许永华

2005 年 7 月

前　言

环论作为代数学的重要分支，其理论和方法在数学的许多领域中有着广泛的应用. 一个多世纪以来越来越多的代数学家给予了环论极大的重视，他们发表和出版了具有重要影响的论文和著作. 随着环论的发展，一些古老的问题不断得到解决或部分地得到解决，而新的问题又不断地产生. 一代又一代的代数工作者们就是围绕着这些问题开始了自己的研究生涯的. 在这些问题中，有关 quasi-Frobenius 代数的问题已是圈内人士关注的焦点问题之一.

首先让我们弄清楚什么是 Frobenius 代数. 设 V 是域 k 上的一个向量空间，一个映射 $B: V\times V \to k$ 称为双线性型，如果对任意 $\alpha_1,\alpha_2 \in k, v, w, \nu_1, \nu_2, w_1, w_2 \in V$, B 满足下列条件:

$$B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 B(v_1, w) + \alpha_2 B(v_2, w),$$
$$B(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 B(v, w_1) + \alpha_2 B(v, w_2).$$

一个双线性型 B 称为非退化的，如果 $B(v,V) = 0 = B(V,w)$, 则 $v = w = 0$.

一个双线性型 B 称为结合的，如果 B 满足 $B(a,\ bc) = B(ab,\ c)$.

1903 年， G. Frobenius[54] 研究了域 k 上的一类特殊的有限维代数，在这类代数上，左正则表示 ${}_AA$ 等价于右正则表示 A_A 的 k- 对偶表示 $(A_A)^*$. 后来，代数学家们利用上述双线性型的语言证明了这类特殊代数的本质特征是“存在一个结合的非退化的双线性型的有限维代数 ”.

鉴于 G. Frobenius 本人在研究这类代数时所做出的开创性工作， 1939 年，T. Nakayama[101] 称这类代数为 Frobenius 代数. 同时， T. Nakayama 引入了一类更广的代数，称这类代数为 quasi-Frobenius 代数 (简称 QF- 代数), 将 Frobenius 代数的重要结论推广到了 quasi-Frobenius 代数上. 也是在这篇文章中， T.Nakayama 利用 Frobenius 代数和 quasi-Frobenius 代数的重要特征引入了 Frobenius 环和 quasi-Frobenius 环的概念 (后者简记为 QF- 环). Frobenius 代数、 QF- 代数及其一般形式的 Frobenius 环、QF- 环在环论中起着很重要的作用，近一个世纪来，得到了广泛研究，构成了代数学的中心研究课题之一.

Frobenius 代数最经典的例子是域上的有限群代数，因此， Frobenius 代数与群表示论有着直接的联系. Frobenius 环也出现在代数的其他分支中. 例如，交换局部 Frobenius 环恰好就是零维局部 Groenstein 环，这类环在交换代数，代数数论，代数几何及组合论中都有着重要的应用. Frobenius 代数也被证明在 Hopf 代数中出现. 在拓扑与几何中， Frobenius 环作为紧致定向流形的上同调环和某种紧致 Kahler 流形的量子上同调环而出现. 要指出的是， Frobenius 环的应用已经超出

了纯代数甚至纯数学的范畴. 例如, Wood 的工作表明, Frobenius 代数可以应用于编码理论. 近年来, Frobenius 代数已经出现在 Yang-Baxter 方程求解工作中.

1980 年, I. P. Lin 将 Frobenius 代数的特征性质进行对偶, 引入了 Frobenius 余代数的概念, 得到了这类余代数的重要特征. 1995 年, J. G. Torrellas 和 C. Nastasescu 合作, 将 quasi-Frobenius 代数的性质进行对偶, 研究了比 Frobenius 余代数更为广泛的一类余代数, 即 quasi-Frobenius 余代数. 1980 年, A. Ioms 在 Lie 代数领域中研究了类似的对象, 称为 Frobenius Lie 代数. 1999 年 [134] A. Stolin 研究了经典 Yang-Baxter equation 的有理解和 quasi-Frobenius Lie algebras 间的关系.

上述的这些代数和余代数具有一个共同特征, 那就是我们上面定义的"非退化的双线型结构", 我们把这个结构称为 **Frobenius 结构**. 前面说了, A 为 Frobenius 代数当且仅当 A 是域 k 上的一个有限维结合代数且存在一个非退化的结合的双线性型; C 为 Frobenius 余代数当且仅当 C 是域 k 上的一个余代数且存在一个 C-平衡的非退化的双线性型; 如果 L 是域 k 上的一个有限维 Lie 代数且存在一个非退化双线性型, 则 L 称为 Frobenius Lie 代数.

因此, 我们可以这样认为, 关于 Frobenius 代数的研究有这样两个主要途径: 一个是将向量空间的非退化的双线性结构运用到其他的代数学研究对象上, 构成了这些领域的新的研究对象, 例如: Frobenius 余代数、 Frobenius Hopf 代数、 Frobenius Lie 代数及其这些对象的种种推广. 另一个是将 Frobenius 环的概念进行推广, 例如: quasi-Frobenius 环、 PF- 环、 IF- 环以及 GPF- 环. 在这条发展路径上, 主要依赖于 1940 年 Baer 引入的内射性概念. 1951 年, Ikeda-Nakayama 将 quasi-Frobenius 环刻画成自内射 Artin 环, 即 quasi-Frobenius 环等价于单边 Artin 单边自内射环, 同时也等价于单边 Noether 单边自内射环. quasi-Frobenius 环还具有很好的对偶性质. 例如 Faith-Walker 证明了环 R 为 quasi-Frobenius 环等价于每个内射右 R- 模投射, 也等价于每个投射右 R- 模内射.

本书共分 12 章, 前面 8 章主要论述 Frobenius 结构在一个域上的代数中的运用, 后面 4 章论述了 Frobenius 结构在一个域上的余代数和 Hopf 代数中的运用.

在第 1 章, 我们主要阐述了内射模尤其是自内射环的基本性质. 在这章中, 我们给出了两个重要的例子, 一个是 Maschke 定理的证明, 一个是 Osofsky 给出的自内射环的左右非对称性例子, 同时我们还给出了 Connell-Renault 定理的证明, 这个定理指出: "群环 RG 是右自内射环群当且仅当 G 为有限群, 并且环 R 为右自内射环".

在第 2 章, Frobenius 代数和 quasi-Frobenius 代数的特征性质成为我们关注的重点, 同时我们也专节介绍了有关 quasi-Frobenius 代数的几个著名的猜想, 如 Nakayama 猜想、广义 Nakayama 猜想、有限维数猜想以及 Auslander-Reiten 猜想及其它们的最新进展.

在第 3 章，我们给出了 quasi-Frobenius 环最基本也是最常用的特征，尤其是使用对偶的语言去刻画 quasi-Frobenius 及 Frobenius 环.

第 4 章给出了 quasi-Frobenius 环的同调特征性质，即 QF- 环的特征是其模范畴中内射模与投射模是一致的，这是一个深刻的结果. 利用 QF- 环的这个特征，我们得到了 QF- 环的一个自然推广： IF- 环，即内射模为平坦模的环类，我们给出了这类环的特征性质.

链条件是研究环论的重要手段，最初引入的链条件是要求环的所有理想满足升链和降链，后来人们引入了所谓的限制链条件，即“环的一些特殊理想类满足升链或降链的条件”对环进行刻画，这一手段在 quasi-Frobenius 环的研究中显得十分有效，这就是第 5 章的内容.

在第 6 章，我们系统地总结了内射性的几种重要推广： FP- 内射、 f- 内射、 P- 内射、 GP- 内射、单内射、极小内射、极大内射、 FGT- 内射性与 CT- 内射性，它们之间的关系如下：

内射性 $\Rightarrow$ FP- 内射性 $\Rightarrow$ f- 内射性 $\Rightarrow$ P- 内射性 $\Rightarrow$ GP- 内射性 $\Rightarrow$sim 内射性 $\Rightarrow$min 内射性，内射性 $\Rightarrow$max 内射性，内射性 $\Rightarrow$ FGT 内射性 $\Rightarrow$ CT 内射性. 这些推广都是本质的并构成了 quasi-Frobenius 研究的主要内容.

在第 7 章，我们利用第 6 章的一些结果，将 quasi-Frobenius 环进行了推广，引入了 PF- 环和 GPF- 环. 我们知道在相当长一段时间内， QF- 环是具有自对偶的环仅有的例子. 直到 1966 年， Osofsky 才去掉 QF- 环的链条件而保留了 QF 环的其他特征，从而引入了另一类非常重要的环类，后来称之为 PF- 环. 任意 QF- 环都是双边 PF- 环，一般地，反过来不成立. 并且和 QF- 环不同的是 PF- 环不是左右对称的. Azumaya, Osofsky 和 Utumi 各自独立地证明了“环 R 是右 PF- 环当且仅当 R 是具有本质右基座的半完全环右自内射”. 这是 PF- 环的一个应用十分广泛的特征，这为后来推广 PF- 环奠定了基础. 在 1995 年和 2001 年， Nicholson 与 Yousif 合作引入了广义 PF- 环 (简记为 GPF) 和 FP- 环的概念. PF- 环的许多特征都被推广到了 GPF- 环和 FP- 环上. 在本章，我们系统地总结了关于 PF- 环类、 GPF- 环类和 FP- 环类一些著名结果.

在 quasi-Frobenius 环的漫长研究岁月里，逐渐提炼出由著名环论学者 Carl Faith 等提出三个猜想，一个是 1982 年提出的，内容为“如果环 R 的每个循环左 R- 模可嵌入自由模中，则 R 为左 Artin 环”(简称为 CF- 猜想), 与这个猜想相关的猜想是“如果每个有限生成的左 R- 模可嵌入自由模，则环 R 为 quasi-Frobenius 环”(简称 FGF- 猜想). 这两个问题是具有包含关系的，如果 CF- 猜想得到证明， FGF 就自然成立了，所以我们把它们归结为一个问题. 第二个是“完全单边自内射环为 quasi-Frobenius 环”，这个问题是 Carl Faith 于 1990 年正式提出的，其实她的最初形式是：“半准素的单边 PF- 环是 QF- 环”，出现在 Carl Faith 的著作

Algebra II (Ring Theory) 中. 第三个猜想称为 Faith-Menal 猜想, 于 1994 年正式提出, 其最简形式为 “右 Noether 左 FP- 内射环为 QF- 环 ”. 这三个猜想使环论学者备受煎熬, 听圈内人士透露, Carl Faith 本人还为他提出的这三个问题悬赏. 我们在第 8 章系统地总结了这三个猜想的最新进展.

在本书的第二部分也就是第 9 章至第 12 章, 我们系统地讨论了 Frobenius 余代数、 quasi-Frobenius 余代数和 Frobenius Hopf 代数的一系列新进展, 特别地, 我们还介绍了 Frobenius 代数、 Frobenius Lie 代数在求解 Yang-Baxter 方程方面的奇特功效. 这些讨论使我们看到了 1903 年 G. Frobenius 所研究的数学对象是多么的深刻, 已渗透到了数学的诸多领域, 形成了一个根深叶茂的代数学分支.

说到这里使我想到了最近文汇出版社出版了一套原创丛书, 其首页有这样一段精彩话语: “在科学创造中, 个人的灵性最终淹没在对共性和规律的探求中. 而艺术的创造, 则是一种无可替代的个人的灵性. 如果没有牛顿, 一定会有马顿或羊顿取而代之, 因为苹果总要从树上掉下来, 万有引力总要被发现. 然而如果没有达 · 芬奇、莎士比亚和曹雪芹, 也许我们永远不会知道人类还会创造《蒙娜丽莎》、《哈姆雷特》和《红楼梦》这样的不朽之作 ······” 其实我们所钟爱的数学又何尝不是这样呢? 有谁能使 G. Frobenius 黯然失色呢? A. Wiles 的出现同样也掩盖不了陈景润的不朽啊!

还是言归正传吧! 本书稿的原始形式是作者在南开大学作博士后时出站报告的一部分, 那时要来总结这方面的工作的原因一是自己从在复旦大学读博士和在浙江大学作博士后时起就对 Frobenius 代数和 Frobenius 余代数产生了兴趣, 二是发现在 Lie 代数领域也有 Frobenius Lie 代数这个研究对象. 后来我在西南交通大学的一个研究生刘敏同志不辞辛劳, 认真地阅读了该稿子, 并把它译成了中文. 再后来我在四川师大的一个研究生赵国也对这个领域感兴趣, 我们合作又做出了些新的结果, 在书稿的取材上又补充了许多新的内容. 去年年底, 我开始在西南财经大学应用经济学流动站做研究, 我的合作导师王裕国教授非常鼓励我在做教育经济学研究的同时一定要把这部书稿整理后正式出版. 我对王裕国先生的理解和支持表示深深地敬意和谢意!

作者在此要特别感谢复旦大学的许永华教授、浙江大学的李慧陵教授、南开大学的孟道骥教授、广西师范大学的程福长教授, 是他们的直接指导、种种帮助和鼓励才使得我能够有对代数学的持久兴趣; 还要感谢刘绍学教授、姚慕生教授、彭联刚教授、薛卫民教授、吴泉水教授、陈维新教授、易中教授, 还有我在广西师范大学、复旦大学、浙江大学和南开大学求学时的各位同学以及我现在的各位同事, 是他们的不断激励和鞭策才使这项工作得以顺利完成. 我还要感谢西南财经大学、四川师范大学给我提供了宽松自由的研究环境, 使得教育经济学的研究和代数学的研究工作能同时进行. 还有我的爱人李咏梅同志, 她在后勤保障方面做了许多工

作，我的几个研究生如赵国、罗荣、蹇红、徐龙玉、李珊珊、余柏林，他们在书稿的校对方面也做了大量的工作，在此一并感谢！

无论将来我还要从事些什么样的工作，但 Frobenius 代数和 Frobenius 余代数将永远伴随着我的研究生涯和研究生的培养工作，同时希望有更多更年轻的代数学爱好者也对这一领域产生兴趣，如果本书能起到抛砖引玉的作用，作者已心满意足了.

最后，受水平所限，书中错误难免，在取材方面很多国内学者的工作又未能完全收入，真诚地请各位同行原谅、批评和指正！

汪明义

2005 年春于成都望江嘉苑

符 号 说 明

在本书中，除了特别指明外，我们总是用 $J(R)$(有时直接用 J) 表示环 R 的 Jacobson 根， 用 $Soc(R_R)(Soc(_RR))$(有时也直接用 $S_r(S_l)$) 表示环 R 的右 (左) 基坐,用$s(m)$表示模M的基座, $Spec(R)$ 表示环 R 全体素理想的集合, $ann_r(S)(ann_l(S))$ (有时也直接用 $r_R(S)((l_R(S)))$ 表示集合 S 在 R 中的右 (左) 零化子理想，这些记号可相应地运用到模.

用 $E(M_R)$ 表示模 M_R 的内射络，用 $leng(M_R)$ 表示 M_R 的长度， $N \subseteq_e M$ 表示 N 是 M 的本质子模， M^* 表示模 M 的对偶模，有时也用 M^* 表示 M 的特征模，从上下文不难做出区分， Tr 用来表示迹映射.

目　　录

第 1 章　内　射　性

内射性的概念是 Baer 于 1940 年提出的，模的内射性与投射性一起构成了同调代数的最基本的概念体系．在应用方面，模的内射性显得更加突出，它极大地丰富了代数学特别是环论的研究内容.

在本章，我们系统地总结了内射模、自内射环的一系列基本性质，特别是给出了两个重要例子的证明：一个是 Maschke 定理，一个是 Osofsky 给出的自内射环的左右非对称性例子，同时我们还给出了 Connell-Renault 定理的证明．本章所涉及的结果是基础的，在后面的章节中，这些结果将被广泛地应用.

§1.1　内　射　模

定义 1.1.1　环 R 上的右 R- 模 E 称为**内射模**, 如果对任意模 M, 其子模 K 到 E 的任意 R- 同态 $h: K \to E$ 均可扩张为 R- 同态 $\overline{h}: M \to E$, 即下列图形是交换的

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & K & \xrightarrow{g} & M \\ & & h\downarrow & \overline{h} \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

由定义去判断一个模的内射性的成本是很大的, 因为涉及任意模. 因此我们尽量去寻找一个在理论上比较经济的方法，这就是我们著名的 Baer 准则.

定理 1.1.1(Baer 准则)　右 R- 模 E 为内射模当且仅当对环 R 任意的右理想 I, 任何 R- 同态 $\varphi: I_R \to E_R$ 均可扩张成 R- 同态 $\overline{\varphi}: R_R \to E_R$.

证明　只证明充分性. 为此设 $g: K \to M$ 为任意单右 R- 模同态，同时设为 $h: K \to E$ 为任意 R- 同态，我们需要验证存在 R- 同态 $\overline{h}: M \to E$ 使得下面的图交换

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & K & \xrightarrow{g} & M \\ & & h\downarrow & h_0 \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

不失一般性，我们可以假定 K 是 M 的子模，而 $g: K \to M$ 为嵌入映射我们将通过把映射 $h: K \to E$ 逐步扩张为 $h': K' \to E$ 使得 $K \leqslant K' \leqslant M$, 从而得到所求的 R- 同态 $\overline{h}: M \to E$.

为此构造集合

$$\sum = \{(K',\ h') \mid \quad K \leqslant K' \leqslant M,\ h'|_K = h\}.$$

因为 $(K,\ f) \in \Sigma$, 所以 $\Sigma \neq \phi$ 定义 Σ 上的偏序 $\prec$ 如下：

$$(K',\ h') \prec (K'',\ h'') \Leftrightarrow K' \subseteq K'', h''|_{K'} = h'$$

由 Zorn 引理， Σ 中存在极大元 $(K_0,\ h_0)$, 即有如下的交换图

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & K & \xrightarrow{g} & K_0 \\ & & h\downarrow & h_0 \swarrow & \\ & & E & & \end{array}$$

下证 $K_0 = M$.

假设 $K_0 \neq M$, 取定 $m \in M \setminus K_0$, 则

$$I = \{r \in R \mid mr \in K_0\}.$$

是 R 的右理想，定义映射 $\varphi : I \to E$ 为

$$\varphi(r) = h_0(mr), \quad \forall r \in I.$$

易证 $\varphi \in Hom_R(I,\ E)$ 由假设，同态 $\varphi : I_R \to R_R$ 可扩张成 R- 同态 $\bar{\varphi} : R_R \to R_R$. 现令 $K_1 = K_0 + mR$, 并定义 $h_1 : K_1 \to E$ 满足

$$h_1(k_0 + mr) = h_0(k_0) + \overline{\varphi}(r), \quad \forall k_0 \in K_0, \quad r \in R,$$

则易知 $h_1 \in Hom_R(K_1,\ E)$. 如果能证明 h_1 是有定义的，那么因为 $h_1 : K_1 \to E$ 是 h_0 的扩张，这就与 $(K_0,\ h_0)$ 的极大性矛盾. 由此可以断言 $K_0 = M$.

为证明 h_1 是有定义的，假设 $k_0 + mr = 0$, 则由 $mr = -k_0 \in K_0$ 可得 $r \in I$. 从而

$$\varphi(r) = \overline{\varphi}(r) = h_0(mr) = -h_0(k_0),$$

即 $h_1(k_0 + mr) = 0$, 这就推出了 h_1 是有定义的.　　**证毕.**

下面的内射生成引理将是我们构造内射模的重要工具.

设 S, R 是有单位的环，令 P 为固定的 $(R,\ S)$- 双模并且 P 作为左 R- 模平坦. 对任意右 S- 模 M_S, 我们记

$$M^* = Hom_S(P_S,\ M_S).$$

因为 P 为左 R- 模，所以 M 具有如下的自然右 R- 模结构：

$$(fr)(p) = f(rp)\ ,$$

其中 $f \in M^*, r \in R, p \in P$.

定理 1.1.2 (内射生成引理) 设 S, R 是有单位的环，令 P 为固定的 $(R,\ S)$-双模并且 P 作为左 R- 模平坦. 如果 M_S 是内射右 S- 模, 则 $M^* = Hom_S(P_S,\ M_S)$ 是内射右 R- 模.

证明 只需验证函子 $Hom_R(-,\ M^*)$ 的正合性对任意的右 R- 模 A, 我们有如下的伴随同构

$$Hom_R(A_R,\ M^*) = Hom_R(A_R,\ Hom_S(P_S,\ M_S)) \cong Hom_S(A \otimes_R P,\ M_S).$$

由 P 作为左 R- 是平坦的，可知函子 $-\otimes_R P$ 在整个左 R- 模范畴上是正合的. 又因为 M_S 是内射模，所以 $Hom_S(-,\ M_S)$ 是右 S- 模范畴上的正合函子. 由此可知函子 $Hom_R(-,\ M^*)$ 是右 R- 模范畴上的正合函子，从而 M^* 是内射右 R- 模. **证毕**.

令 k 为任意域，为了研究 k- 代数 A 上的左 A- 模 P, 我们可以把 ${}_RP$ 看成 $(A,\ k)$- 双模注意到 k- 向量空间是 k- 内射的，则我们可以得到内射生成引理的如下重要推论.

推论 1.1.1 设 A 为域 k 上的代数，${}_RP$ 为固定的投射左 A- 模，并以自然的方式看作 $(A,\ k)$- 双模. 则对任意的向量空间 V, 均有 $Hom_k(P_k,\ V)$ 是内射右 A-模.

人们在研究内射模时，发现它与 Noether 环有着紧密的联系.

由定义不难知道，有限多个内射模的直和是内射的. 自然要问，无穷多个内射模的直和是否仍是内射模. 下面这个由 Cartan-Eilenberg-Bass 共同得到的定理解决了这个问题.

定理 1.1.3 对任意环 R, 下列条件等价:

(1) R 为左 Noether 环;

(2) 内射左 R- 模的无穷直和仍为内射模;

(3) 内射左 R- 模的可数直和仍为内射模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 设 $\{E_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是任意一族内射左 R- 模，现考虑其直和 $E = \bigoplus_{\alpha \in A} E_\alpha$. 我们将利用 Baer 准则证明 E 是内射模. 为此任取 R 的左理想 ${}_RI$, 我们需证任何 R- 同态 $\varphi: {}_RI \to {}_RE$ 可扩张成 R- 同态 $\overline{\varphi}: {}_RR \to {}_RE$.

因为 R 是左 Noether 环，所以 ${}_RI$ 是有限生成左理想，从而存在有限的指标集，不妨设为 $\{\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n\}$, 使得 φ 的同态像 $Im(\varphi)$ 包含在 $E' = E_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus E_{\alpha_n}$ 之中. 因为 E' 为有限个内射模的直和，故 E' 内射模. 由 Baer 准则，R- 同态

$\varphi :_R I \rightarrow_R E$ 可扩张成 R- 同态 $\varphi' :_R R \rightarrow_R E'$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & {}_R I & \rightarrow & {}_R R \\ & & \varphi\downarrow & \varphi' \swarrow & \downarrow\overline{\varphi} \\ 0 & \rightarrow & E' & \rightarrow & E \end{array}$$

由于 $E' \subseteq E$, 所以 $\varphi' :_R R \rightarrow_R E'$ 可看作所求的 R- 同态 $\overline{\varphi} :_R R \rightarrow_R E$.

(3) $\Rightarrow$ (1) 考虑环 R 的左理想升链

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots.$$

设 $I = \bigcup\limits_n I_n$, 则 I 为 R 的左理想. 现令

$$E = \bigoplus_n E\,(R/I_n).$$

由假设 E 为内射左 R- 模.

令 $\pi_n : R \rightarrow R/I_n$ 为自然同态. 注意到对充分大的 n 有 $a \in I_n$, 从而有 $\varphi(a) \in E$. 故定义 R- 同态 $\varphi : I \rightarrow E$ 如下:

$$\varphi(a) = (\pi_1(a), \cdots, \pi_n(a), \cdots), \quad \forall a \in I \subseteq R.$$

因为 E 为内射左 R- 模, 故由 Baer 准则知 R- 同态 $\varphi :_R I \rightarrow_R E$ 可扩张成 R- 同态 $\overline{\varphi} :_R R \rightarrow_R E$. 令 $\overline{\varphi}\,({}_R 1) = e = (e_1, \cdots, e_n, \cdots) \in E$, 则

$$\overline{\varphi}\,(a) = ae = (ae_1 \cdots, ae_n, \cdots), \quad \forall a \in I.$$

现在对充分大的 n, 我们有 $e_n = 0$, 从而 $\pi_n(a) = ae_n = 0$, 即 $a \in I_n$, 故对充分大的 n, $I = I_n$ 成立, 这就证明了 R 满足左理想升链条件, 所以 R 为左 Noether 环. **证毕**.

现在我们考虑内射模的直和分解. 任意环上的内射模未必可以分解成不可分解内射模的直和, 然而我们有下面的漂亮结果, 它是由 Faith-Walker-Matlis-Papp 共同得到的.

定理 1.1.4　对任意环 R, 下列条件等价:

(1) R 为左 Noether 环;

(2) 每个内射左 R- 模都可分解成不可分解内射子模的直和;

(3) 存在基数 c 使得每个内射左 R- 模可分解成 c- 生成内射子模的直和.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2) 设 E 为 Noether 环 R 上的任意内射左 R- 模. 我们先证 E 包含了一个不可分解内射子模. 事实上, 任取 $0 \neq x \in E$, 则只需证明 $E(Rx)$ 中包含了一个不可分解内射子模. 由于 R 为 Noether 环, 所以 Rx 不能包含无穷直和.

又因为 $E(Rx)$ 为 Rx 的本质扩张，所以 $E(Rx)$ 也不含无穷直和. 由此可知 $E(Rx)$ 包含了一个不可分解内射子模.

现构造非空集合

$$\sum = \left\{ \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha \mid E_\alpha 为 E 的不可分解内射子模 \right\},$$

由 Zorn 引理，Σ 中存在极大元 $E_0 = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$. 因为 R 为左 Noether 环，由定理 1.1.3 可知 $E_0 = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ 为内射模. 从而存在 $E' \leqslant E$ 满足

$$E = E_0 \bigoplus E'.$$

由 E_0 的极大性可得 $E' = 0$, 所以 E 可分解成不可分解内射子模的直和

$$E = \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha.$$

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 E_R 是非零的不可分的内射右 R- 模. 不难知道，存在右理想 $I_R \leqslant R_R$ 使得 $E \cong E(R/I)$. 由 (2) 知道任意内射右 R- 模同构于其子模的直和，而这些子模同构于某个 $E(R/I)$. 而 $\{E(R/I : I_R \leqslant R_R)\}$ 是一个集合，从而 (3) 得到证明.

(3) $\Rightarrow$ (1) 只要证得任意一族内射模 $\{M_i\}$, 其直和 $M = \bigoplus M_i$ 亦为内射的即可. 设 $\beta = \alpha + |M|$(一个无限的基数), 再令

$$M' = \prod_{j=1}^{\infty} M_j, \qquad M'' = \prod_{C} M',$$

这里 α 为 (3) 中给出的，$|C| > \beta$. 显然 M', M'' 均为内射模. 由 (3) 知道，存在合适的其基数不超过 α 的子模 I_b 使得 $M'' = \bigoplus\limits_{b\in B} I_b$ 我们能够构造 B 的子集 $B_1, B_2, \cdots, \subseteq B$, $|B_j| \leqslant \beta$ 使得 M 可以作为 $M'' = \bigoplus\limits_{b\in B} I_b$ 的直和项而被嵌入，从而 M 为内射模. **证毕.**

§1.2 内射模的自同态环

我们回忆一下，一个 Grothendieck 范畴 $\boldsymbol{C}$ 称为**谱范畴**, 如果 $\boldsymbol{C}$ 中的每个短正合列分裂. 如果 $\boldsymbol{C}$ 是一个 Grothendieck 范畴，我们把 $\boldsymbol{C}$ 和一个谱范畴 **Spec-$\boldsymbol{C}$** 联系起来，从某种意义讲，**Spec-$\boldsymbol{C}$** 描述了 $\boldsymbol{C}$ 中内射对象的作用. 令 **Spec-$\boldsymbol{C}$** 中的对象就是 $\boldsymbol{C}$ 中的对象，对 $\boldsymbol{C}$ 中的对象 C 和 D, 令

$$\boldsymbol{Hom}_{\boldsymbol{Spec\text{-}C}}(C,\ D) = \lim_{\to C'} \boldsymbol{Hom}_{\boldsymbol{C}}(C',\ D),$$

其中正向极限取遍了由 C 的本质子对象 C' 构成的下降正向族. 于是存在函子

$$P: \boldsymbol{C} \to \mathbf{Spec} - \boldsymbol{C}$$

使得对 $\boldsymbol{C}$ 中的对象保持不变，而把映射 $\boldsymbol{C} \to D$ 变成 $\lim\limits_{\to C'} Hom(C', D)$ 中的典范像. P 把 $\boldsymbol{C}$ 中的本质单同态变成 **Spec** -$\boldsymbol{C}$ 中的同构. 因此 P 将 $\boldsymbol{C}$ 中的每个对象 M 与其内射包络 $E(M)$ 视为等同 (假设 $\boldsymbol{C}$ 有足够多的内射对象). 当 R 是一个环时，我们用 **Spec**-$\boldsymbol{R}$ 表示 **Spec**-$(\boldsymbol{M_R})$.

下面的基本定理总结了 Utumi, Faith, Johnson, Wong, Osofsky 和 Renault 等人的工作.

定理 1.2.1 设 $\boldsymbol{C}$ 是一个谱范畴, C 是 $\boldsymbol{C}$ 中的任一个对象, 令 $R = Hom_{\boldsymbol{C}}(C, C)$, 则:

(1) R 是 Von Neumann 正则环;

(2) 如果 D 是 $\boldsymbol{C}$ 中异于 C 的一个对象，则右 R- 模 $Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)$ 是非奇异的内射模. 特别地， R 是右自内射环.

证明 (1) 如果 C 在 $\boldsymbol{C}$ 中， $\alpha: C \to C$ 是线性映射，则存在 $\boldsymbol{C}$ 的子对象 K 和 N 使得 $C = \ker\alpha \oplus K, C = Im\alpha \oplus N$. 映射 α 导出一个同构 $K \to Im\alpha$, 记其逆映射为 $\beta: Im\alpha \to K$, 则由 $\boldsymbol{C}$ 是谱范畴知 β 可以扩张成 $f: C \to C$. 现证 $\alpha f \alpha = \alpha$. 如果 $x \in C$, 则 $x = y + z (y \in \ker\alpha,\ z \in K)$, 从而有 $\alpha\, f\alpha(x) = \alpha\, f\alpha(z) = \alpha(x)$. 因此， R 是 Von Neumann 正则环.

(2) 设 I 是 R 的任意右理想，由于 R 是正则环，则 I 是形式为 eR 的有限生成右理想的直并，其中 $e = e^2$. 同态 $\phi: eR \to Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)$ 定义为 $\phi(e) = \varphi$ 使得 $\varphi(1-e) = 0$. 由于 $C = Ime \oplus Im(1-e)$, 有 $Hom_R(eR, Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)) \cong Hom_{\boldsymbol{C}}(Ime, D)$. 从而有

$$\begin{aligned} Hom_R(I, Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)) &= Hom_R(\varinjlim eR, Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)) \\ &\cong \varprojlim Hom_{\boldsymbol{C}}(eR, Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)) \\ &\cong \varprojlim Hom_{\boldsymbol{C}}(Ime, D) \\ &\cong Hom_{\boldsymbol{C}}(\varinjlim Ime, D) = Hom_{\boldsymbol{C}}(C', D), \end{aligned}$$

其中 $C' = \varinjlim Ime$. 由于 C' 是 C 的直和项，存在满同态

$$Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D) \to Hom_{\boldsymbol{C}}(C', D) \cong Hom_R(I, Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D))$$

是由包含映射 $I \to R$ 导出的，从而证明了 $Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)$ 是内射模.

下证 $Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)$ 是非奇异模，假设 I 是 R 的一个本质右理想且存在非零同态 $\phi \in Hom_{\boldsymbol{C}}(C, D)$ 满足 $\phi(1) = 0$, 则 $C = C' \oplus \ker\phi$. 令 $e: C \to C'$ 是 C 到

C' 上的投射，则 e 是 R 的一个非零元且 $eR\bigcap I \neq 0$ 对每个非零 e, $\alpha \in eR\bigcap I$ 有 $\phi(e\alpha) = 0$ 与 $\ker\phi\bigcap \mathrm{Im}e = \ker\phi\bigcap C' = 0$. 故 $Hom_C(C,\ D)$ 是非奇异模. **证毕.**

现设 R 是一个环，函子 $P: \boldsymbol{M_R} \to \mathbf{Spec}\text{ - }\boldsymbol{R}$ 是 $\boldsymbol{M_R}$ 到 $\mathbf{Mod_R}$ 的谱范畴的典范函子. 对每个模 M 有一个导出映射

$$\mu_M : H = Hom_R(M,\ M) \to Hom_{\mathbf{Spec-R}}(P(M),\ P(M)),$$

并且 μ_M 是一个环同态. 当 M 是内射模时， μ_M 是满射，因为此时对 M 的任意本质子模 M', 任意同态 $M' \to M$ 都可以提升成一个 $M \to M$ 的同态.

我们将考虑 μ_M 的核 M

$$\ker \mu_M = \{f \mid f \in Hom_R(M,\ M),\ \text{且} \ker f \text{是本质子模}\}.$$

显然 $\ker \mu_M$ 是 H 的一个理想.

命题 1.2.1 设 E 是一个内射模, $H = End(E)$ 为 E 的自同态环. 则 $\ker \mu_E = J(H)$, 这里 $J(H)$ 表示 H 的 Jacobson 根.

证明 假设 $f \in \ker \mu_E$. 由于 $\ker(1-f)\bigcap \ker f = 0$, 有 $\ker(1-f) = 0$, 从而 $1-f$ 是单同态. 则 $\mathrm{Im}\ (1-f)$ 是内射模，从而是 E 的直和项. 对任意 $x \in \ker f$ 有 $x = (1-f)(x)$, 从而有 $\ker f \subseteq \mathrm{Im}\ (1-f)$. 于是 $\mathrm{Im}\ (1-f)$ 也是 E 的本质子模. 从而 $\mathrm{Im}\ (1-f) = E$. 所以对每个 $f \in \ker \mu_E$, 有 $1-f$ 可逆. 故 $\ker \mu_E \subset J(H)$.

另一方面, 任取 $f \in Rad\,(H)$, 假定 $M \subseteq E$ 是满足 $M\bigcap \ker f = 0$ 的任意子模, 则 $f\,|_M : M \to E$ 是单射. 因为 E 是自内射模, 所以存在 $g \in H$ 使得 $g(f(m)) = m$, 对任意 $m \in M$ 成立. 又由 $f \in Rad\,(H)$ 知 $1 - gf$ 是 H 中的单位元，所以 $M = 0$. 由此可得 $f \in \ker \mu_E$. 故 $J(H) \subseteq \ker \mu_E$. **证毕.**

由命题 1.2.1 与定理 1.2.1 立即得到下面的定理.

定理 1.2.2 设 E 是一个内射 R- 模， H 是 E 的自同态环，则 $H/J(H)$ 是 Von Neumann 正则右自内射环.

内射模的自同态环的一个更重要的性质是模掉 Jacobson 根后能幂等提升.

定理 1.2.3 设 H 是内射 R- 模 E 的自同态环，则 $H/J(H)$ 的幂等元可以提升成为 H 的幂等元.

证明 假设 $f \in H$, $f - f^2 \in J(H)$, 从而有 $L = \ker\,(f - f^2)$ 是 E 的本质子模, 因此 $f(L)$ 的内射包是 E 的直和项，且对某个幂等元 $g = g^2 \in H$, 有 $f(L) = \mathrm{Im}g$, 则在 L 上有 $gf = f$, 故 $gf - f \in J(H)$. 令

$$h = g + gf(1-g),$$

则显然 $h = h^2$, 由于 $gfgf\ |_L = gf^2\ |_L = gf\ |_L$, 于是对任意 $x \in L' = \mathrm{Im}\ (1-g) + f(L)$ 有

$$(h - gf)\ (x) = (g - gfg)\ (x) = 0.$$

又因为 L' 是 $\text{Im}(1-g)+\text{Im}g=E$ 的本质子模，从而有 $h-gf\in J(H)$ 由于已证 $gf-f\in J(H)$, 故有 $h-f\in J(H)$ 即 h 提升为幂等元 $\overline{f}$. **证毕**.

由以上定理可得到关于自内射环的如下漂亮结果，它是由 Utumi 、 Faith 、 Johnson 、 Wong 、 Osofsky 和 Renault 共同得到的.

定理 1.2.4　如果 R 是一个右自内射环，则有：

(1) $J(R)$ 是 R 的右奇异理想;

(2) $R/J(R)$ 是 Von Neumann 正则环;

(3) $R/J(R)$ 内射环;

(4) R 模掉 $J(R)$ 幂等提升.

证明　由定理 1.2.2 与定理 1.2.3 知结论成立.　**证毕**.

由于一个 Von Neumann 正则环 R 是半单环当且仅当 R 不含无限正交幂等元，由定理 1.2.2 和定理 1.2.3 得下面的重要定理.

定理 1.2.5　设 R 为一个右自内射环，则以下条件等价

(1) R 是半局部环;

(2) R 是半完全环;

(3) R 具有有限 Goldie 维数;

(4) R 不含无限的非零正交幂等元族.

§1.3　自内射环的基本性质

除了在 §1.2 节指出的一些性质外，自内射环还有许多重要的结果，本节系统地给出. 下面这个重要的定理是 Ikeda-Nakayama 于 1954 年给出的.

定理 1.3.1　设 R 是左自内射，则

(1) 对任意一对左理想 L_1 和 L_2, $r(L_1\bigcap L_2)=r(L_1+L_2)$;

(2) 对任何有限生成右理想 I, $rl(I)=I$.

证明　(1) 如果 L_1, L_2 是两个左理想, 很显然地有 $r(L_1)+r(L_2)\subseteq r(L_1\bigcap L_2)$. 另一方面，假设 $a\in r(L_1\bigcap L_2)$, 我们可以如下定义一个同态 $f:L_1+L_2\to R$：如果 $b\in L_1$, 令 $f(b)=b$; 如果 $b\in L_2$, 令 $f(b)=b(1+a)$, 这两种表示在 $L_1\bigcap L_2$ 上是一致的. 但是由于 R 是左自内射环，于是存在 $c\in R$ 使得 $f(b)=bc$, 特别地，对 $b\in L_1$, 我们有 $b=bc$, 即 $b(c-1)=0$. 因此有

$$a=(c-1)+(1+a-c)\in r(L_1)+r(L_2)$$

(2) 对任意 $a\in R$ 我们有 $aR\subseteq rl(a)$. 如果 $b\in rl(a)$, 我们可以如下定义一个同态 $f:Ra\to Rb$, 使得 $f(xa)=xb$ 由于 R 为一个右自内射环， f 一定可以表示成 R 中某个 c 的右乘变换因此 $f(a)=b=ac$, 故 $b\in aR$ 由此可得对任意 $a\in R$ 我们

有 $aR = rl(a)$. 现在令 $I = a_1R + a_2R + \cdots + a_nR$, 我们有

$$\begin{aligned} rl(I) &= rl(a_1R + a_2R + \cdots + a_nR) \\ &= r(l(a_1R) \bigcap l(a_2R) \bigcap \cdots \bigcap l(a_nR)) \\ &= rl(a_1R) + rl(a_2R) + \cdots + rl(a_nR) \\ &= a_1R + a_2R + \cdots + a_nR \\ &= I. \end{aligned}$$

证毕.

下面我们将用 j 表示典范满的环同态 $R \to R/J$. 下面这些结果主要是由 Y. Utumi 于 1967 年给出的.

命题 1.3.1 设 R 是左自内射环, 则有下列结论

(1) 对 R 的任一个左理想 L, 存在 R 的一个幂等元 e 使得 Re 是 L 的一个本质扩张;

(2) 对任意理想 L, 如果 $Re(e = e^2)$, 作为左 R- 模在 L 上是本质的, 则 $j(e)$ 是 $j(R)$ 中的中心幂等元.

证明 (1) 对任意左理想 L, 由 R 是左自内射环知: 内射包 $E(L)$ 是 R 的直和项, 于是存在幂等元 e 使得 $E(L) = Re$.

(2) 假设 Re 和 $R(1-e)$ 分别包含了相互同构的左理想 B 和 C , 如果 $B \neq 0$, 由于 Re 在 L 上是本质的, 有 $L \bigcap B \neq 0$, 由于同构 $B \to C$ 实质上可以表示成 S 中某个元的右乘变换, 故 $L \bigcap Re \neq 0$, 从而 $Re \bigcap R(1-e) \neq 0$ 矛盾, 所以 $B = C = 0$. 由 (文献 [147] Lernma5.5) 第一部分的证明知 $j(e)j(R)(1-e) = 0$, 又因为 $j(R)$ 是正则的和半素的, 所以 $j(e)$ 是 $j(R)$ 的中心幂等元. **证毕.**

下面是左自内射环 R 的 Jacobson 根 (用 J 表示) 的一个刻画.

定理 1.3.2 设 R 是左自内射环, L 是 R 的一个左 (右) 理想, 则 $L \subset J$ 当且仅当 L 不含非零幂等元.

证明 假设 $L \not\subset J$, 由于 R/J 是正则环, $j(L)$ 包含了一个非零幂等元 $j(x)$. 由定理 1.2.4 知, 存在 R 的一个幂等元 e 使得 $j(e) = j(x)$, 于是 $1 - e + x$ 可逆, 因此 $Rex = Re(1 - e + x)$ 与 Re 同构. 由于 R 满足条件: 环 R 的任何同构于由一个幂等元生成的左理想的左理想也是由一个幂等元生成, 于是可假定 Rex 由幂等元 $f = f^2$ 生成. 由于 $j(x) \neq 0$, $e \neq 0$ 和 $f \neq 0$, 如果 L 是左理想, 我们可以假设 $x \in L$, 于是有 $f \in L$. 若 L 是右理想, 令 $f = yx$, 从而 L 包含一个非零幂等元 $xyxy$. **证毕.**

命题 1.3.2 设 R 是左自内射环, L 是环 R 的一个左理想, 则 L 是环 R 的本质左理想当且仅当 $r(L) \subset J$.

证明　由命题 1.3.1(1) 知，L 不是本质左理想当且仅当存在幂等元 $e=e^2\neq 1$ 使得 $L\subseteq Re$, 这等价于 $r(L)$ 包含一个非零幂等元，即 $r(L)\not\subset J$.　**证毕**.

命题 1.3.3　设 R 是左自内射环，L 是一个理想. 如果 $r(l(J))=J$, 那么若 $l(L)=0$, 则有 $j(L)$ 在 $j(R)$ 中的左零化子 $l(j(L))=0$.

证明　由于 $j(R)$ 是左自内射环, 故存在 $j(R)$ 的一个幂等元 $j(e)$ 使得 $j(R)j(e)$ 是 $j(L)$ 的一个本质扩张. 由命题 1.3.1 知 $j(e)$ 是一个中心幂等元. 故不防假设 e 是 R 的一个幂等元，且 $L\subseteq Re+J=eR+J$, 于是有 $l(L)\supseteq R(1-e)\bigcap l(J)$. 由于 $l(L)=0$, 于是 $R(1-e)\bigcap l(J)=0$. 由假设知 $l(J)$ 是 R 的一个本质左理想，故 $R(1-e)=0$, $e=1$, 即证明了 $j(L)$ 是 $j(R)$ 的一个本质左理想，又由于 $j(R)$ 是半素的，故 $l(j(L))=0$.　**证毕**.

设 R 是一个左自内射环，若主左理想 Rx_i 的和是直和，则存在一族正交幂等元 (e_i) 使得 $Rx_i=Re_i$ 对每个 i 成立. 现在，我们用这个事实证明下面的命题.

命题 1.3.4　设 R 是左自内射环，I 是 R 的一个包含 J 的理想, 则当在 $j(R)$ 中有 $l(j(I))=0$ 时，在 R 中也有 $l(I)=0$.

证明　由假设和命题 1.3.2 知，$j(I)$ 是 $j(R)$ 的本质左理想. 令 $B=\Sigma j(R)j(x_i)$ 是一个极大左理想，它是包含在 $j(I)$ 中的主左理想的直和. 于是 $j(I)$ 是 B 的本质扩张, 故 B 是 $j(R)$ 的本质左理想. 所以存在 $j(R)$ 的一族正交幂等元 $\{j(e_i)\}$ 使得对每个 i 都有 $j(R)j(x_i)=j(R)j(e_i)$. 不失一般性，我们不妨假设 $\{e_i\}$ 是 R 的一族正交幂等元且 R 是 ΣRe_i 的本质扩张. 由于 $I\supset J$, 于是 I 包含每个 e_i. 如果 $l(I)\neq 0$, 有 $l(I)\bigcap\sum Re_i\neq 0$. 但是，由于 $l(I)e_i=0$ 对任意 i 成立，则有 $l(I)\bigcap\sum Re_i=0$，矛盾，故 $l(I)=0$.　**证毕**.

定理 1.3.3　设 R 是左自内射环，则下列条件等价

(1) I 是 R 的一个理想，若 $l(I)=0$, 有 $I=R$;

(2) $j(R)$ 是有限多个左自内射单环的直和且 $r(l(J))=J$.

证明　(1) ⇒ (2). 假设 (1) 成立并且 $J=0$. 则易见 R 作为 R-R 双模是完全可约的. 因此 R 是有限个单环的直和，显然这些单环都是左自内射环，这就证明了 (2) 的第一部分.

假设 (1) 成立. 如果有 $I\supseteq J$ 使 $l(j(I))=0$, 由命题 1.3.4 知 $l(I)=0$, 于是有 $I=R$, 因此 $j(I)=j(R)$, 于是由 (1) 知，$j(R)$ 是有限个左自内射单环的直和，设 e 是 R 的一个幂等元使得 Re 在 $l(J)$ 上是本质的，由命题 1.3.1(2) 知 $j(e)$ 是中心的，且 $J+eR$ 是一个理想，有 $l(J+eR)=l(J)\bigcap R(1-e)=0$，故 $J+eR=R$. 从而有 $eR=R$, 故 $e=1$, 所以 $l(J)$ 是 R 的一个本质左理想，因此由命题 1.3.2 有 $r(l(J))=J$.

(2) ⇒ (1). 假设 (2) 成立，设 I 是 R 的一个理想且 $l(I)=0$, 由命题 1.3.3 知 $l(j(I))=0$, 故 $j(I)$ 是 $j(R)$ 的本质左理想, 由假设知 $j(I)=j(R)$, 于是有 $R=I+J$,

故 $I=R$. **证毕.**

定理 1.3.4 (1) 设 R 为一个右自内射环, 则对任意 $a\in R$, 存在左 R- 模同态

$$(aR)^* = Hom_R(aR,\ R) \cong Ra.$$

(2) 若 R 为双边自内射环, 则 R 的主单边理想自反, 并且对任意 $a,b\in R$ 有

$$aR\cong bR \Leftrightarrow Ra\cong Rb.$$

证明 (1) 考虑下面的正合列

$$0\to l(a)\to R \xrightarrow{a} Ra\to 0,$$

由此可得典范同构

$$Ra\cong R/l(a) = R/l(aR).$$

又因为 R_R 内射, 所以, $R/l(aR)\cong (aR)^*$. 由此可得

$$Ra\cong R/l(a) = R/l(aR)\cong (aR)^*.$$

定义映射 $\varphi: Ra\to (aR)^*$ 为

$$\varphi(ya)(az) = yaz, \quad \forall y,z\in R,$$

则 $\varphi: Ra\to (aR)^*$ 为所求的同构.

(2) 假定 R 为双边自内射环, 则由 (1) 知对任意 $a\in R$, 可得

$$(aR)^{**}\cong (Ra)^*\cong aR.$$

这表明自然映射 $\varepsilon: Ra\to (Ra)^{**}$ 也为同构, 其余可对偶地证明. **证毕.**

§1.4 自内射环的例子

首先, 我们讨论群环的自内射性. 设为任意域, 根据著名的 Maschke 定理, 当域 k 的特征不能整除有限群 G 的阶时, 群环 kG 是半单环, 从而是自内射环. 事实上, Gaschutz-Ikada(见定理 2.1.4) 证明了任意域上的有限群代数都是 Frobenius 代数, 从而也是自内射环. 鉴于 Maschke 定理在有限群表示论中的基本重要性, 这里我们给出 Maschke 定理的完整证明.

定理 1.4.1 设 G 为有限群, k 为任意域, 使得群 G 的阶 $|G|$ 为 k 中可逆元, 则群环 kG 是半单环.

证明　设 V 为任意左 kG- 模，W 为 V 的 kG- 子模，我们需证明 W 是 V 的直和项. 设 U 是 W 的线性补空间，即有 $V = W \bigoplus_k U$. 令 p 是 V 到 W 上的自然投射，并定义 k- 线性映射 $\pi : V \to W$ 如下：

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}\ p(gv),$$

注意这里 π 的合理性用到假设群 G 的阶 $|G|$ 为 k 中可逆元. 现对任意 $v \in W$, 我们有

$$\pi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}\ p(gv) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g^{-1}\ (gv) = v \in W.$$

所以 π 在 W 上的限制 $\pi|_W$ 为恒等映射. 如果我们能证明 k- 线性映射 $\pi : V \to W$ 为 kG- 模同态，则 $\pi : V \to W$ 为 V 到 W 的自然投射，进而就有 $V = W \bigoplus_{kG} \ker\pi$.

事实上，对任意 $g \in G, v \in V$, 我们有

$$\begin{aligned}\pi(g \cdot v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} h^{-1}\ p(hgv) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{hg \in G} g(hg)^{-1}\ p((hg)v) \\ &= \frac{1}{|G|} g \cdot \sum_{x \in G} x^{-1}\ p(xv) \\ &= g \cdot \pi(v).\end{aligned}$$

证毕.

群环的内射性吸引了很多作者去研究，下面是最为经典的一个结果，它是由 Connell-Renault 给出的.

定理 1.4.2　设 G 为任意群，R 为任意有单位元 1 的环，则以下条件等价：

(1) 群环 RG 是右自内射环;

(2) 群 G 为有限群，并且环 R 为右自内射环.

证明　(2) $\Rightarrow$ (1) 因为 R_R 为内射右 R- 模，并且 RG 作为左 R- 模平坦，由内射生成引理 (见定理 1.1.2) 知 $(RG)^* = Hom_R(RG, R_R)$ 是内射右 RG- 模. 下证存在右 RG- 模同构 $t : RG \to (RG)^*$, 从而群环 RG 是右自内射环.

回忆一下，Kaplansky 迹映射 $Tr : RG \to R$ 的定义为

$$Tr\left(\sum_{g \in G} r_g g\right) = r_1, \quad \forall \sum_{g \in G} r_g g \in RG.$$

易知 $Tr \in (RG)^* = Hom_R(RG, R)$. 现定义映射 $t : RG \to (RG)^*$ 为

$$t(x)(y) = Tr(xy), \quad \forall x, y \in RG.$$

则易证 t 为 RG- 同态，下证 t 为同构.

首先证明 $t: RG \to (RG)^*$ 为单同态. 为此，只需证明下面的等式

$$x \cdot y = \sum_{g\in G} Tr((xy)g)g^{-1} = \sum_{g\in G} t(x)(yg)g^{-1}, \quad \forall y \in RG, \tag{2.1}$$

即 x 是由 $t(x)$ 惟一确定的. 现对任意 $x \in RG$, 定义 $c_g(x) \in R$ 为由下面等式所确定

$$x = \sum_{g\in G} c_g(x)g^{-1}.$$

则有

$$xh = \sum_{g\in G} c_g(x)g^{-1}h, \ \forall h \in G.$$

令 $k^{-1} = g^{-1}h$, 则我们有下面的公式

$$c_{xh}(k) = c_g(x) = c_{hk}(x) \ . \tag{2.2}$$

由此可得

$$\begin{aligned} t(x)(yg) &= c_{x(yg)}(1) \\ &= c_{(xy)g}(1) \\ &= c_{xy}(g) \end{aligned}$$

所以

$$c_{xy}(g) = t(x)(yg), \quad \forall x \in RG, \quad g \in G,$$

这就证明了 (1) 式，从而 $t: RG \to (RG)^*$ 为单同态.

最后证明 $t: RG \to (RG)^*$ 为满同态. 为此，任取 $f \in (RG)^* = Hom_R(RG, R)$. 由公式 (2), 我们定义 $x \in RG$ 由下式所确定

$$c_{x\cdot y}(g) = f(yg), \quad \forall y \in RG, \quad g \in G$$

那么根据 $t: RG \to (RG)^*$ 的定义显然有 $t(x) = f$, 即 $t: RG \to (RG)^*$ 为满同态.

我们把剩余的证明留给读者. **证毕.**

在 1966 年， B. Osofsky[115] 给出下面的著名例子表明环的自内射性不是左右对称的.

例 1.4.1 设 D 是一个除环和 ${}_DV$ 是一个无限维左向量空间， $R = \mathrm{End}({}_DV)$ 为其自同态环，则

(1) R 不是右自内射环;

(2) R 是左自内射环.

证明　(1) 取 ${}_DV$ 的一组 D- 基 $\{v_i \mid i \in I\}$. 对任意 $i \in I$, 令 $\pi_i \in R$ 是由 $v_j\pi_i = \delta_{ij}v_i$(其中 δ_{ij} 是 Kronecker 符号) 定义的一组对偶基.

先证 V_R 不是内射模. 令 $A = \sum_i \pi_i R$, 则 A 为 R 的右理想. 对任意 $\sum_i \pi_i r \in A$, 定义 $f : A \to V_R$ 为

$$f\left(\sum_i \pi_i r_i\right) \sum_i v_i r_i \in V .$$

为证 f 是定义好了的, 令 $\pi_{i_1}r_{i_1} + \cdots + \pi_{i_n}r_{i_n} = 0 \in R$. 将 $\pi_{i_1}r_{i_1} + \cdots + \pi_{i_n}r_{i_n}$ 应用于 $v_{i_1} + \cdots + v_{i_n}$, 即得 $v_{i_1}r_{i_1} + \cdots + v_{i_n}r_{i_n} = 0 \in V$, 即证得 f 是定义好了的. 若 V_R 是内射模, 则存在向量 $v \in V$ 使得 $v_i = f(\pi_i) = v\pi_i$ 对任意 $i \in I$ 成立. 但是如果 $v = d_{i_1}v_{i_1} + \cdots + d_{i_n}v_{i_n}$, 则对任意 $i \notin \{i_1, \cdots, i_n\}$, 我们有 $v\pi_i = 0$, 矛盾, 所以 V_R 不是内射模.

现固定一个下标 $i \in I$, 并且注意到 V 具有自然右 R- 模结构, 则我们有一个典范的 R- 满同态 $g : R \to V_R$, 其定义为 $g(r) = v_i r$(任意 $r \in R$). 易见由 $g'(v_i r) = \pi_i r$(任意 $r \in R$) 定义了一个 R- 同态 $g' : V_R \to R$ 使得 g' 分裂 g. 因此, V_R 同构于正则模 R_R 的直和项 $\pi_i R$, 特别地, V_R 是投射 R- 模. 然而我们知道 V_R 不是内射模, 所以 R_R 也不是内射模, 即证得 R 不是右自内射环.

(2) 若将 D- 同态写在右边, 则可把 ${}_RR$ 与 $Hom_D({}_DV_R, {}_DV)$ 等同. 因为 D 是除环, ${}_DV$ 当然是一个内射 D- 模, 并且由 (1) 可知 V_R 是投射 R- 模. 从而由内射生成引理 (定理 1.1.2) 即知 $Hom_D({}_DV_R, {}_DV) = {}_RR$ 是内射左 R- 模, 因此 R 是左自内射环.　　**证毕**.

第2章　Frobenius 代数

1903 年，G. Frobenius[54] 研究了域 k 上的一类有限维代数，在这类维代数上，左正则表示 ${}_AA$ 等价于右正则表示 A_A 的 k- 对偶表示即 $(A_A)^* = Hom_k(A_A, k)$. 1939 年， T. Nakayama[101] 称这类代数为 Frobenius 代数. 历史上，关于 Frobenius 代数的研究，最先是从域上有限群代数开始的，而关于域上有限群代数的研究主要是受有限群表示论的激发. 后来 Brauer, Nesbitt, Nakayama 等人对 Frobenius 代数进行了大量深入的研究. 在文献 [102] 中， T. Nakayama 还引入了一类更广的代数称为 quasi-Frobenius 代数. 在本章，我们给出 Frobenius 代数和 quasi-Frobenius 代数的一些著名特征，同时我们介绍了有关 quasi-Frobenius 代数的几个著名的猜想，如 Nakayama 猜想、广义 Nakayama 猜想、有限维数猜想以及 Auslander-Reiten 猜想及其它们的最新进展.

§2.1　Frobenius 代数

域 k 上的每个有限维代数 A 都有两种自然表示：第一正则表示即正则模 ${}_AA$ 的表示，第二正则表示即右正则模 A_A 的 k- 对偶表示 $(A_A)^* = Hom_k(A_A, k)$. 1903 年， G. Frobenius 研究了下面一类特殊的有限维代数.

定义 2.1.1　域 k 上的有限维代数 A 称为 **Frobenius** 代数，如果存在左 A-模同构 ${}_AA \cong (A_A)^*$.

为了给出 Frobenius 代数的刻画，我们首先给出域 k 上的向量空间的一般双线性型的一些说明.

设 V 、 W 是域 k 上的两个向量空间. 一个映射 $B: V \times W \to k$ 称为 **双线性型**, 如果对任意 $\alpha_1, \alpha_2 \in k, v, v_1, v_2 \in V, w \in W$, B 满足下列条件:

(1) $B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, w) = \alpha_1 B(v_1, w) + \alpha_2 B(v_2, w)$,

(2) $B(v, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 B(v, w_1) + \alpha_2 B(v, w_2)$.

一个双线性型 B 称为 **非退化的**，如果由 $B(v, w) = 0 = B(V, w)$ ，可推出 $v = w = 0$.

一个双线性型 $B: A \times A \to k$ 称为 **结合的**, 如果对 $a, b, c \in A$ 有

$$B(ab,\ c) = B(a,\ bc).$$

下面我们利用双线性型语言给出 Frobenius 代数的一个简明特征，它是 Brauer-Nesbitt**给出的**.

定理 2.1.1　设 A 是一个有限维代数，则下列论述等价：

(1) A 是一个 Frobenius 代数；

(2) 存在一个非退化的、结合的双线性型 $\beta : A \times A \to k$;

(3) 存在一个 k- 线性函数 $\lambda \in A^* = Hom_k(A, k)$, 使得其核 $\ker(\lambda)$ 不包含非零左或右理想.

证明　(1)⇒(2). 固定一个右 R- 模同构 $h : A_A \to ({}_A A)^*$, 则 $h(xy) = h(x)(y)$. 定义 $\beta : A \times A \to k$ 为

$$\beta(x, y) = h(x)(y) \in k.$$

因为 h 是同构，所以 β 非退化，并且成立

$$\beta(xy, z) = h(xy)(z) = h(x)(y)(z) = h(x)(yz) = \beta(x, yz).$$

(2) ⇒ (3). 对给定的双线性映射 $\beta : A \times A \to k$, 定义线性映射 $\lambda : A \to k$ 为

$$\lambda(x) = \beta(x, 1).$$

则 $\lambda(xA) = 0$ 蕴涵 $\beta(xA, 1) = \beta(x, A) = 0$. 因 f 是非退化的，从而 $x = 0$. 类似地，由 $\lambda(Ax) = 0$ 可推出 $x = 0$. 由此可得 λ 的核 $\ker(\lambda)$ 中不包含非零左或右理想.

(3) ⇒ (1). 固定线性映射 $\lambda : A \to k$ ，定义 $h : A_A \to ({}_A A)^*$ 为

$$h(x)(z) = \lambda(xz).$$

如果 $h(x) = 0$ ，则 $xA \subseteq \ker(\lambda)$, 由此可得 $x = 0$. 因此， h 是单的，因而也是满的. 最后，我们有

$$(h(x)y)(z) = h(x)(yz) = \lambda(xyz) = h(xy)(z).$$

因此， $h(xy) = h(x)y$, 故 h 是右 A- 模同构.　　**证毕.**

下面给出 Frobenius 代数的维数特征，它是由 T. Nakayama**给出的.**

定理 2.1.2　设 A 是一个有限维代数，则下列论述等价：

(1) A 是一个 Frobenius 代数；

(2) 对 A 中所有左理想 L 和右理想 R 有： $l(r(L)) = L$, $r(l(R)) = R$, 并且

$$\dim_k r(L) + \dim_k(L) = \dim_k A,$$
$$\dim_k l(R) + \dim_k(R) = \dim_k A.$$

证明　(1)⇒(2). 由定理 2.1.1 知存在一个非退化的、结合的双线性型 $\beta : A \times A \to k$. 对任意 $x \in A$ ，定义映射

$$\beta_x : y \to \beta(x, y), \quad \forall y \in A$$

则显然有 $\beta_x \in A^* = Hom_k(A,k)$. 再定义映射 $\varphi: A \to A^*$ 为

$$\varphi: x \to \beta_x, \quad \forall x \in A,$$

因为 $\beta: A \times A \to k$ 是非退化的双线性映射，并且注意到 $\dim_k A = \dim_k A^*$, 所以 $\varphi: A \to A^*$ 是 k- 同构.

设 R 为 A 的左理想，定义

$$R^{\perp} = \{x \in A \mid \beta_x(R) = 0\} = \{x \in A \mid \beta(x,R) = 0\},$$

则我们有 $l(R) = R^{\perp}$. 事实上，如果 $x \in R^{\perp}$ ，则由 β 结合可得

$$\beta_x(R) = \beta(x,R) = \beta(xR,1) = 0.$$

又由于 β 非退化，我们有 $xR = 0$, 即 $x \in l(R)$, 所以 $R^{\perp} \subseteq l(R)$. 反之，如果 $x \in l(R)$, 即 $xR = 0$ ，则 $\beta_x(R) = \beta(x,R) = \beta(xR,1) = 0$. 因此 $x \in R^{\perp}$, 即 $l(R) \subseteq R^{\perp}$. 由线性代数可得

$$\dim_k A = \dim_k R + \dim_k R^{\perp} = \dim_k R + \dim_k l(R). \tag{1}$$

现设 L 为 A 的左理想，则同理可得

$$\dim_k A = \dim_k L + \dim_k L^{\perp} = \dim_k L + \dim_k r(L), \tag{2}$$

在 (2) 式中令 $1 = L(R)$, 则可得 $r(L) = L^{\perp}$, 从而

$$\dim_k A = \dim_k L(R) + \dim_k rl(R). \tag{3}$$

比较 (1) 式与 (3) 式，可得 $\dim_k R = \dim_k rl(R)$, 因为 $R \subseteq rl(R)$, 所以 $R = rL(R)$.

若在 (1) 式中令 $R = r(L)$, 则同理可得

$$L = lr(L).$$

(2)⇒(1). 这一步的证明比较困难，有兴趣的读者可参看文献 [38] (p.416~418).

证毕.

定义 2.1.2 域 k 上的有限维代数 A 称为 **对称代数**, 如果存在 (A,A)- 双模同构 ${}_AA_A \cong ({}_AA_A)^*$.

显然对称代数是一类特殊的 Frobenius 代数.

设 A 是域 k 上的一个代数. 一个双线性型 $\beta: A \times A \to k$ 称为 **对称的**, 如果对 $a,b \in A$, 有 $\beta(a,b) = \beta(b,a)$.

利用对称双线性型可以给出对称代数下面的类似于 Frobenius 代数的刻画，我们省去其证明.

定理 2.1.3 设 A 是一个有限维代数，则下列论述等价：

(1) A 是一个对称代数；

(2) 存在一个非退化的、结合的对称双线性型 $\beta : A \times A \to k$;

(3) 存在一个 k- 线性函数 $\lambda \in A^*$ 满足 $\lambda(xy) = \lambda(yx)$ (对任意 $x, y \in A$), 并使得其核 $\ker(\lambda)$ 不包含非零左或右理想.

最后，我们指出任意域上的有限群代数是对称代数，这个结果在有限群的模表示论中具有十分重要的意义. 或许这也是对称代数的最重要的例子之一，历史上正是对域上有限群代数的研究才引发了人们给出对称代数的定义的. 下面这个定理是由 **Gaschutz-Ikada** 给出的.

定理 2.1.4 设 kG 是任意域 k 上的一个有限群群 G 的群代数. 则 kG 是对称代数.

证明 定义 A 上的双线性型 $f : kG \times kG \to k$ 如下

$$f\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g, \sum_{h\in G}\mu_h h\right) = \sum_{g\in G}\lambda_g \mu_{g^{-1}}.$$

直接验证 f 是非退化的、结合的对称双线性型. 由定理 2.1.3 即知 kG 是对称代数. **证毕.**

另一种重要的对称代数是通过所谓的平凡扩张 (trivial extension) 得到的.

我们先介绍平凡扩张的概念. 设 M 是任意 (A, A)- 双模，则我们可以构造 M 的通过 A 的平凡扩张代数 $A \times M$, 其乘法定义为

$$(a, m) \cdot (a', m') = (aa', am' + ma'), \quad \forall a, a' \in A, m, m' \in M.$$

下面这个定理是 Tachikawa 给出的.

定理 2.1.5 设 A 是域 k 上的有限维代数. 则 A 的平凡扩张代数 $T(A) = A \times A^*$ 是对称代数.

证明 定义 k- 线性映射 $\lambda : T(A) \to k$ 为

$$\lambda(a, f) = f(1), \quad \forall a \in A, \quad f \in A^*$$

则由

$$\lambda((a, f)) \cdot (a', f') = \lambda(aa', af' + fa') = (af' + fa')(1) = f'(a) + f(a'),$$

可得 $\lambda((a, f) \cdot (a', f')) = \lambda((a', f') \cdot (a', f))$ 对任意 $(a, f), (a', f') \in T(A)$ 成立.

现假设有 $\lambda((a, f)T(A)) = 0$. 则对任意 $(a', f') \in T(A)$ 有 $f'(a) + f(a') = 0$. 令 $a' = 0$, 则有 $a = 0$, 并且 $f(a') = 0$ 对所有 $a' \in A$ 成立，故 $f = 0$. 即证 λ 的核 $\ker(\lambda)$ 不包含非零左或右理想. 由定理 2.1.3 知 $T(A)$ 为对称代数. **证毕.**

最后我们指出，本节中代数都是域 k 上的代数. 然而，这个概念是可以扩展的. 20 世纪 50 年代，Eilenberg-Nakayama 成功地将 Frobenius 代数的理论扩展到了交换环上. 设 k 为任意交换环，如果 A 作为 k- 模是有限生成投射的，则称 A 为 k- 代数. 利用 A 的左 A- 模结构，我们同样可以考虑 k- 对偶 $A^*:=Hom_k(A,k)$ 的右 A- 模结构. 称代数 A 为 k-Frobenius 代数，如果存在右 A- 模同构 $A_A\cong(A^*)_A$. 这样，我们就可以得到更多的 Frobenius 代数的例子. 例如，取 $k=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, 则我们可以考虑 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Frobenius 代数. 这种在更广的框架下研究 Frobenius 代数对于编码理论是十分有用的. 事实上，Wood 的最近工作表明有限域上的经典编码理论的许多结果都可以推广到有限维交换 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Frobenius 代数上 (见文献 [158]).

§2.2 quasi-Frobenius 代数

Frobenius 代数是通过比较 A 的第一种正则表示 ${}_AA$ 和 A 的第二种正则表示 $(A_A)^*$ 来定义的. 如果不要求两种表示同构而是比较其 Krull-Schmidt 不可约分支的同构型，则我们可得 quasi-Frobenius 代数的经典定义如下.

定义 2.2.1 一个域 k 上的有限维代数 A 称为 quasi-Frobenius 代数，如果模 ${}_AA$ 和 $(A_A)^*$ 的 Krull-Schmidt 不可约分支相同 (尽管它们的重数和乘法运算可能不同).

显然 Frobenius 代数是 quasi-Frobenius 代数.

下面给出 quasi-Frobenius 代数的双零化子条件刻画.

定理 2.2.1 设 A 是域 k 上的有限维代数，则下列论述等价:

(1) A 是 quasi-Frobenius 代数;

(2) 正则模 ${}_AA$ 内射;

(3) 对 A 中的每个左理想 L 和右理想 R, 有下面的双零化子条件

$$r(l(R))=R,\ l(r(L))=L.$$

证明 (1)⇒(2). 由假定知 ${}_AA$ 的不可约分支同构于主不可约右 A- 模 eA(其中 $e=e^2$ 为本原幂等元) 的 k- 对偶 $(eA)^*=Hom_k(eA,k)$. 由内射生成引理 (推论 1.1.1) 知，左 A- 模 $(eA)^*$ 内射，从而 ${}_AA$ 内射.

(2)⇒(3). 只需证明A的左、右理想格之间存在反同构. 现设A是quasi-Frobenius 代数, 则可具体构造左、右理想格之间的反同构如下: 任取左理想 L, 令 $r(L)=\{b\in A\mid Lb=0\}$; 任取右理想 R, 令 $l(R)=\{a\in A\mid aR=0\}$. 显然，$r(L)$ 是右理想，而 $l(R)$ 是左理想. 我们要证明 l 和 r 互为逆映射，这当然也就实现了所求的子模格反同构.

考察 A- 模的正合序列

$$0 \to I \to A \to A/I \to 0,$$

用对偶函子作用并注意到 A 是内射模，可得正合列

$$0 \to Hom_A(A/I, A) \to Hom_A(A, A) \to Hom_A(I, A) \to 0,$$

但是由于 $Hom_A(A/I, A) \cong l(I)$, 我们可将所得正合列改写为

$$0 \to l(I) \to A \to A/l(A) \to 0.$$

再一次应用对偶函子可得正合列

$$0 \to rl(I) \to A \to A/lr(I) \to 0,$$

由此可得带有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & A & \to & A/I & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \\ 0 & \to & rl(I) & \to & A & \to & A/rl(I) & \to & 0 \end{array}$$

因为映射 $I \to rl(I)$ 为单射，由五引理即知映射 $A/I \to A/rl(I)$ 为同构，从而 $I = rl(I)$ 成立.

(3)⇒(1). 由于 A 是一个有限维代数，对每个不可约分左 A- 模 P, 存在本原幂等元 $e = e^2$, 使得 $P \cong Ae/Je$, 其中 $J = \mathrm{Rad}A$ 为 Jacobson 根. 从而 P 的 k- 对偶模 $P^* \cong er(J)$. 进而

$$er(J) = eA \cap r(EJ) = r(A(1-e) + Je),$$

并且由

$$\frac{A}{A(1-e) + Je} = \frac{A(1-e) \bigoplus Ae}{A(1-e) \bigoplus Je} \cong Ae/Je.$$

可知 $A(1-e) + Je$ 是 A 的极大左理想. 由 (2) 知，极大左理想的右零化子是极小右理想. 因此 $P^* \cong er(J)$ 是不可约右 R- 模. 同样的证明也适用于不可约右 R- 模即其对偶. 由此可知模 ${}_AA$ 和 $(A_A)^*$ 的 Krull-Schmidt 不可约分支相同. 从而 A 是 quasi-Frobenius 代数. **证毕.**

下面我们给出 quasi-Frobenius 代数的模刻画，这个结果我们在后面的章节中知道已被大大地推广.

定理 2.2.2 设 A 是域 k 上的有限维代数，则下列论述等价:

(1) A 是 quasi-Frobenius 代数;

(2) 任意投射左 A- 模均为内射模;

(3) 任意内射左 A- 模均为投射模.

证明 (1)⇒(2). 假设 $_AP$ 是任意投射左 A- 模. 则 $_AP$ 是某个自由模 $(_AA)^{(I)}$(其中 I 为某指标集) 的直和项. 因为 A 是 quasi-Frobenius 代数, 由定理 2.2.1 知正则模 $_AA$ 内射. 由于 A 是域 k 上的有限维代数, 所以 A 是 Noether 环, 从而根据著名的 Bass-Papp 定理 (定理 1.2.3), 内射模 $_AA$ 的直和 $(_AA)^{(I)}$ 内射. 所以其直和项 $_AP$ 也内射.

(2)⇒(1). 假定任意投射左 A- 模均为内射模, 则特别地左正则模 $_AA$ 内射. 由定理 2.2.1 知, A 是 quasi-Frobenius 代数.

(1)⇒(3). 假设 A 是 quasi-Frobenius 代数, E 是任意内射左 A- 模. 由于 A 是域 k 上的有限维代数, 所以 A 是 Noether 环, 从而根据著名的 Matlis-Papp 定理, 内射模 E 可分解成不可分解内射子模的直和. 又因为投射模的直和投射, 所以我们不妨假定 E 本身是不可分解内射模.

由于 A 是域 k 上的有限维代数, 所以 A 是 Artin 环, 从而 E 包含了一个 R 的极小左理想 $_RV$. 再由 E 是不可分解内射模, 可得 $E = E(_RV)$, 从而 E 是 R 的直和项, 所以 E 投射.

(3)⇒(1). **我们将这部分的证明留给读者.** **证毕.**

§2.3 Nakayama 猜想

首先指出, 域 k 上的有限维 quasi-Frobenius 代数又称为自内射代数, 后者因定理 2.2.1 得名.

Nakayama 猜想是关于 quasi-Frobenius 代数的一个很好的问题, 于 1958 年提出后吸引了大量的研究工作, 至今仍是代数表示论领域的公开问题 (见文献 [10]).

最初, Nakayama 猜想是在研究有限维代数时提出的, 后来对其研究范围扩大到了 Artin 代数 (定义 2.3.2), 并且成了 Artin 代数表示论的著名问题.

Nakayama 猜想的研究对代数表示论产生了很大的影响, 并且催生了许多有着广泛应用的概念和理论.

为介绍 Nakayama 猜想, 我们需要下面的定义.

定义 2.3.1 设 A 是有单位元的环, M 为左 A- 模. 则 $_AM$ 的 **控制维数**(dominant dimension)$dom.\dim_A M$ 定义为最大的自然数 n(或 ∞) 使得如果

$$0 \to {}_A M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots$$

是 $_AM$ 的极小内射分解, 则对所有 $i < n$(或 $i < \infty$) 都有 E_i 是投射模.

有了控制维数的概念, 我们现在可以正式陈述 Nakayama 猜想如下 (见文献 [103]).

猜想 2.3.1　设 A 是域 k 上的有限维代数. 如果其左控制维数 $dom.\ \dim_A A = \infty$, 则 A 为 quasi-Frobenius 代数.

1968 年，Mueller[100] 证明了对一个域上的代数 A, 其左控制维数 $dom.\dim {}_A A$ 与其右控制维数 $dom.\dim A_A$ 相等, 从而可统一记为 $dom.\dim A$. 由此可得 Nakayama 猜想的等价形式如下.

猜想 2.3.2　设 A 是域 k 上的有限维代数, 并且其控制维数 $dom.\dim A = \infty$, 则 A 为 quasi-Frobenius 代数.

1968 年，Mueller[100] 证明了，如果 A 是某个 Artin 代数的完全闭 "生成子 - 余生成子 "(ultimately closed generator-cogenerator) 的自同态环代数，则 Nakayama 猜想成立. 1973 年，Tachikawa[139] 进一步证明了，如果 A 是域 k 上群代数 kG 的 "生成子 - 余生成子 " 的自同态环代数，其中 G 为有限 p- 群，则 Nakayama 猜想成立.

1948 年，R.M.Thrall[143] 推广 quasi-Frobenius 代数的概念引入了左 QF-3 代数，即有极小忠实 (minimal faithful) 左理想的代数. 1962 年，Tachikawa[140] 证明了，如果 A 是域 k 上的有限维代数，并且其控制维数 $dom.\dim A = \infty$, 则 A 为 QF-3 代数. 1964 年, Tachikawa[141] 对 QF-3 环提出了相应的 Nakayama 猜想.

猜想 2.3.3　设 A 是 QF-3 环，并且左其控制维数 $ldom.\dim A{=}\infty$, 则 A 为左自内射环.

1968 年，Mueller-Morita-Tachikawa[100] 证明了，如果 A 为左 QF-3 代数并且其极小忠实左理想的自同态环具有有限表示型 (finite representation type), 则 QF-3 环的 Nakayama 猜想成立.

下面我们介绍广义 Nakayama 猜想，由它可推出 Nakayama 猜想.

为此，我们需要下面的定义.

定义 2.3.2　设 A 一个有单位元的 Artin 环，其中心为 $Z(A)$. 则称 A 为 Artin 代数 [101], 如果 A 作为 $Z(A)$- 模是有限生成的.

Artin 代数是域 k 上的有限维代数的推广，并且包含后者作为重要的特例.

关于 Artin 代数，Auslander-Reiten[7] 于 1975 年提出了下面的著名猜想.

猜想 2.3.4　令 A 为 Artin 代数，并且设

$$0 \to {}_A A \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots$$

为 A 的极小内射分解，则每个不可分解的内射 A- 模都是某个 E_i 的直和项.

定理 2.3.1　如果广义 Nakayama 猜想成立，则 Nakayama 猜想也成立.

证明　设 A 是域 k 上的有限维代数，并且其左控制维数 $dom.\dim_A A = \infty$. 设 ${}_A A$ 的极小内射分解为

$$0 \to_A A \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots.$$

因为 A 的左控制维数 $dom.\dim_A A=\infty$, 所以对所有 $i<\infty$ 都成立 E_i 是投射模. 如果广义 Nakayama 猜想成立, 则每个不可分解的内射 A- 模都是某个 E_i 的直和项. 由此可知所有的内射左 A- 模都投射, 由 Faith-Walker 定理 (定理 2.2.2) 知 A 为 quasi-Frobenius 代数. **证毕**.

设 A 为一个 Artin 代数, S 为单左 A- 模. 注意到 S 的内射包 $E(S)$ 是某个 E_n 的直和项当且仅当 $Ext_A^n(S,A)\neq 0$, 则可得 Auslander-Reiten 在 1975 得到的广义 Nakayama 猜想的下面的等价形式.

猜想 2.3.5 设 A 为一个 Artin 代数, S 为单左 A- 模. 则存在 n 使得 $Ext_A^n(S,A)\neq 0$.

广义 Nakayama 猜想下面的等价形式是 Tachikawa 于 1973 年首先对自内射代数提出的 (见文献 [139]).

猜想 2.3.6 设 A 为一个 Artin 代数, ${}_AM$ 为左 A- 模. 如果对所有 $n\geqslant 1$ 都有 $Ext_A^n({}_AM,{}_AA\bigoplus_A M)=0$, 则 ${}_AM$ 为投射模.

1983 年, Wilson[155] 证明了, 如果 A 是域上有限维正定分次 (positively graded) 代数, 则广义 Nakayama 猜想成立. 1986 年, Fuller-Zimmermann- Huisgen[56] 证明了, 如果 A 为 Artin 代数满足或者是正定分次的或者 $Rad(A)^3=0$, 则广义 Nakayama 猜想成立. 1991 年, Draxler-Happel(见文献 [156]) 证明了, 如果 A 为 Artin 代数满足 $J^{2l+1}=0$ 并且 A/J^l 是表示有限的 (representation finite), 这里 $J=RadA$ 为 A 的 Jacobson 根, 则广义 Nakayama 猜想成立.

Nakayama 猜想的肯定解决可以看作是对另一个著名的有限维数猜想 (finitistic dimension conjecture) 的逼近. 事实上, Nakayama 猜想可由有限维数猜想推出. 不仅如此, 广义 Nakayama 猜想也可由有限维数猜想推出.

下面先给出有限维数的定义 (见文献 ([17])).

定义 2.3.3 设 A 是有单位元的环. 则其左有限维数 $lFPD(A)$ 定义为

$$lFPD(A)=\sup\{Pd({}_AM)|{}_AM\in A-Mod, Pd({}_AM)<\infty\}.$$

关于有限维数的较早结果是关于交换环的. 1957 年 Auslander-Buchsbaum 证明了交换 Noether 局部环 R 的有限维数 $FPD(R)<\infty$. 1962 年, Bass[18] 证明了对于交换 Noether 环 R, 其 Krull 维数 Kdim$\leqslant$ 其有限维数 $lFPD(R)$.1971 年, Reynaud-Gruson[126] 进一步证明了, 对于交换 Noether 环 R, 其 Krull 维数 Kdim = 其有限维数 $lFPD(R)$. 对于非交换环的情形, 1965 年, Mochizuki[97] 证明了, 若 R 为半准素环, 则当 $lpd((Rad(R))^i)<\infty$, $\forall i\geqslant 2$ 时, 其左有限维数 $lFPD(R)<\infty$. 1968 年, Small[131] 进一步证明了, 若 R 为半准素环, 则当 $Rpd((Rad(R))^2)<\infty$ 时, 其左有限维数 $lFPD(R)<\infty$. 但是, 正如 Green-Kirkman-Kuzmanovich[59] 所指出, 至今也没有发现半准素环具有无穷有限维数.

关于有限维数有下面的著名的有限维数猜想, 它是由 Rosenberg-Zelinsky 于 20 世纪 50 年代首先对域上有限维代数提出的 (见文献 [17]).

猜想 2.3.7　设 A 为 Artin 代数, 则其左有限维数 $lFPD(A) < \infty$.

下面的定理表明 Nakayama 猜想可由有限维数猜想推出. 事实上, 广义 Nakayama 猜想也可由有限维数猜想推出 (见文献 [10]).

定理 2.3.2　若有限维数猜想成立, 则 Nakayama 猜想也成立.

证明　设 A 是域 k 上的有限维代数, 并且其左控制维数 $dom.\dim_A A = \infty$. 取 $_AA$ 的极小内射分解

$$0 \to_A A \xrightarrow{d_0} E_0 \to \cdots \to E_{i-1} \xrightarrow{d_i} E_i \to \cdots$$

使得任意 E_i 投射. 假设有限维数猜想成立, 则不妨设 A 的左有限维数 $lFPD(A) = n < \infty$. 由于任意 E_i 投射, $\text{Im}(d_n)$ 具有如下的投射分解

$$0 \to_A A \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} E_1 \to \cdots \to E_n \xrightarrow{d_n} \text{Im}(d_n) \to 0$$

所以 $\text{Im}(d_n)$ 的投射维数 $\leqslant n$, 从而 $\text{Im}(d_1)$ 投射. 由此可知下面的短正合列

$$0 \to_A A \xrightarrow{d_0} E_0 \xrightarrow{d_1} \text{Im}(d_1) \to 0$$

分裂, 进而可知 $_AA$ 是内射模 I_0 的直和项. 所以 $_AA$ 内射, 再由定理 2.2.1 即可断言 A 为 quasi-Frobenius 代数, 即证 Nakayama 猜想成立.　　**证毕.**

1987 年, Zacharial[179] 证明了有限维数猜想对一类正定分次 Artin 代数成立. 1991 年, Green-Kirkman-Kuzmanovich (参见文献 [130]) 证明了有限维数猜想对域上有限维单项代数 (monomial algebra, i. e., finite dimensional path algebras modulo ideals generated by paths) 成立. 1991 年, Green- Zimmermann-Huisgen[65] 证明了, 如果 A 是左 Artin 环并且 $(Rad(A))^3 = 0$, 则其左有限维数 $lFPD(A) < \infty$. 1991 年, Auslander-Reiten[8] 证明了, 如果 A 为 Artin 代数并且 $P^{\infty}(A)$(由具有有限投射维数的有限生成 A- 模所构成的子模范畴) 是反变有限的 (contravariantly finite), 则 A 的左有限维数 $lFPD(A) < \infty$. 然而, Igusa-Smalϕ-Todorov[74] 指出, 并不是对任意 Artin 代数 A 其子模范畴 $P^{\infty}(A)$ 都是反变有限的. 2002 年, Igusa - Todorov 证明了如果 A 的表示维数 (representation dimension)$\leqslant 3$, 则 A 的有限维数 $FPD(A) < \infty$. 然而, Rouquier 证明了, Artin 代数的表示维数并不总是 $\leqslant 3$, 所以有限维数猜想仍然是远未解决的最具挑战性的问题之一.

有限维数猜想还可以推出下面的强 Nakayama 猜想 (见文献 [10],[169]).

猜想 2.3.8　设 A 为一个 Artin 代数, $_AM$ 为非零左 A- 模. 如果对任意 n 都有 $Ext_A^n(_AM,_AA) = 0$ 成立, 则 $_AM = 0$.

为了继续深入讨论 Nakayanma 猜想, 我们给出下面的定义 (见文献 [9]).

定义 2.3.4 一个 Artin 代数 A 称为 Gorenstein 代数，如果 A 的左内射维数和右内射维数均有限.

借助 Gorenstein 代数的概念，我们则可以叙述下面的猜想. 它也是有限维数猜想的推论.

猜想 2.3.9 设 A 为一个 Artin 代数. 如果 A 的左内射维数 $Id_A A < \infty$, 则 A 的右内射维数 $IdA_A < \infty$, 即 A 为 Gorenstein 代数.

猜想 2.3.7 的证明可由有限维数猜想推出 (见文献 [8]).

定理 2.3.3 设 A 为一个 Artin 代数，并且 A 的左内射维数 $Id_A A < \infty$. 如果 A 的有限维数 $FPD(A) < \infty$, 则 A 的右内射维数 $IdA_A < \infty$, 即 A 为 Gorenstein 代数.

证明 令 A 的左内射维数 $Id_A A = n < \infty$, 并且设

$$0 \to_A A \xrightarrow{d_0} E_0 \to \cdots \to E_{i-1} \xrightarrow{d_i} E_i \to \cdots$$

为 A 的极小内射分解. 如果 $\mathrm{Im} d_i \neq 0$, 那么 $Ext_A^i(\mathrm{Im} d_i, {}_A A) \neq 0$. 又因为 A 的有限维数 $FPD(A) < \infty$, 所以 $pd\mathrm{Im} d_i < \infty$, 由此可知 A 的右内射维数 $IdA_A < \infty$, 即 A 为 Gorenstein 代数.

若有限维数猜想成立，则 Nakayama 猜想也成立.

Nakayama 猜想与控制维数有关，下面我们将控制维数的条件削弱，从而引入 k-Gorenstein 代数的概念 (见文献 [9]).

定义 2.3.5 一个 Artin 代数 A 称为左 k-Gorenstein 代数，如果

$$0 \to_A A \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_i \to \cdots$$

是 A 的极小内射分解，则 $pd_A E_i \leqslant i$ 对所有 $i < k$ 成立.

需要指出的是， Auslande-Reiten 证明了 k-Gorenstein 代数是左右对称的 (见文献 [9]).

显然，如果一个 Artin 代数 A 的控制维数 $dom.\dim A \geqslant k$, 则 A 为 k-Gorenstein 代数.

进一步，我们可以定义 Auslander 代数 (见文献 [9]).

定义 2.3.6 称代数 A 为 Auslander 代数，如果对任意 $k > 0$ 都有 A 为 k-Gorenstein 代数.

注意，因为 k-Gorenstein 代数是左右对称的，所以 Auslander 代数也是左右对称的.

显然，如果代数 A 的控制维数 $dom.\dim A = \infty$, 则 A 为 Auslander 代数.

现在我们可以介绍著名的 Auslander-Reiten 猜想，它包含 Nakayama 猜想为其特例. 如果 Auslander-Reiten 猜想成立，则 Nakayama 猜想也成立.

猜想 2.3.10　设 A 为一个 Artin 代数. 如果 A 为 Auslander 代数, 则 A 为 Gorenstein 代数.

1994 年, Auslander-Reiten[9] 证明了, 如果 A 为 Auslander 代数, 并且 A 的左内射维数 $Id_A A < \infty$, 则 A 的右内射维数 $Id A_A < \infty$, 即 A 为 Gorenstein 代数.

近年来, 对 Nakayama 猜想的研究已扩大到了 Noether 代数 (见文献 [11], [71]).

最后, 我们将这几个重要猜想之间的蕴含关系总结如下

有限维数猜想	⇒	广义Nakayama 猜想	⇒	Nakayama 猜想
⇓				⇑
强Nakayama 猜想				Auslander-Reiten 猜想

第3章　quasi-Frobenius 环、Frobenius 环与对偶

quasi-Frobenius 环的概念首先是由 T.Nakayama 于 1941 年作为对 quasi-Frobenius 代数的推广而提出来的 [102]. 1955 年, S. Eilenberg 和 T. Nakayama 给出了 quasi-Frobenius 环的等价定义. 一个环 R 称为 quasi-Frobenius 环, 如果 R 是双边 Artin 环且在有限生成右 R- 模全子范畴和有限生成的左 R- 模全子范畴间存在一个 R- 对偶 [45]. 在本章, 我们运用对偶的语言系统地总结了 quasi-Frobenius 环与 Frobenius 环的基本特征, 并对已知的一些结果给出了新的证明.

§3.1　quasi-Frobenius 环与自反性

对偶性是研究环与模的重要方法之一. 我们知道, 有限生成投射模的对偶模也必为有限生成投射的, 因而必为自反模. 一般的投射模只是无挠的. 本章研究对偶性所涉及的主要问题有: (1) 在什么条件下每个有限生成的模均为自反模或均为无挠模; (2) 在什么条件下每个有限生成无挠模均是自反的. 在对偶性问题中, 自反模、无挠模的特征也是令人关注的.

引理 3.1.1　设 R 是左 Noether 环, 则任何有限生成左 R- 模 A 是无挠的当且仅当 A 为某个有限生成自由左 R- 模 F 的子模.

证明　设 A 是一个有限生成的左 R- 模, 则 A^* 是有限生成右 R- 模. 于是存在一个有限生成自由右 R- 模 G 使得序列

$$G \to A^* \to 0$$

正合. 由于 A 是无挠的, 则有正合列

$$0 \to A \to F = G^*$$

即 A 为 F 的一个子模.

另一方面显然成立.　**证毕**.

注记　在引理 3.1.1 中, 如果将左 **Noether** 环条件换成较弱的条件左 $\boldsymbol{\pi}$-**coherent** 环, 结论也是成立的. 一个环 $\boldsymbol{R}$ 称为左 $\boldsymbol{\pi}$-**coherent** 的, 如果每个有限生成右 $\boldsymbol{R}$- 模的对偶模是有限生成的 (见文献 [150]).

引理 3.1.2 设 A 是一个有限生成无挠左 R- 模，则存在一个有限生成无挠右 R- 模 B 和一个有限生成投射左 R- 模 P 得下列序列正合

$$0 \to A^* \to P^* \to B \to 0, \tag{2.1}$$

$$0 \to B^* \to P \to A \to 0, \tag{2.2}$$

$$0 \to A \to A^{**} \to Ext_R^1(B, R) \to 0, \tag{2.3}$$

$$0 \to B \to B^{**} \to Ext_R^1(A, R) \to 0. \tag{2.4}$$

证明 对上述 A, 有正合列

$$0 \to M \xrightarrow{\eta} P \xrightarrow{\pi} A \to 0,$$

其中 P 是有限生成投射模. 于是得正合列

$$0 \to A^* \xrightarrow{\pi^*} P^* \xrightarrow{\eta^*} M,$$

令 $B = \mathrm{Im}\eta^{**}$, 显然 B 是有限生成无挠模，故 (2.1) 得证.

由 (2.1) 得正合列

$$0 \to B^* \to P^{**} \xrightarrow{\pi^{**}} A^{**},$$

考虑下列交换图

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\pi} & A & \to & 0 \\ \mu_P \downarrow & & \downarrow \mu_A & & \\ P^{**} & \xrightarrow{\pi^{**}} & A^{**} & & \end{array}$$

μ_P 是同构， μ_A 是单同态，故 $\mathrm{Im}\mu_A = \mathrm{Im}\pi^{**} \cong A$, 故有下列交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P & \xrightarrow{\pi} & A \\ & & & & \uparrow \mu_P^{-1} & & \uparrow \tau \\ 0 & \to & B^* & \to & P^{**} & \xrightarrow{\pi^{**}} & \mathrm{Im}\pi^{**} \end{array}$$

其中 $\tau\mu(A) = A$, 故得 (2.2).

由 (2.1) 得正合列

$$\begin{aligned} &0 \to Hom_R(B, R) \to Hom_R(P^*, R) \to Hom_R(A^*, R) \\ &\to Ext_R^1(B, R) \to Ext_R^1(P^*, R) = 0 \end{aligned}$$

由于 $Hom_R(B, R) = B^*, Hom_R(P^*, R) = P^{**}, Hom_R(A^*, R) = A^{**}$ 和 $\mathrm{Im}\pi^{**} \cong A$. 于是得到 (2.3). 同理可证 (2.4). **证毕.**

注记 上述引理 Jans 起初是在 Noether 环中得到证明的 (见文献 [75]), 后来我们发现它在任意环中也是成立的.

下面的引理给出了在 Noether 环中每个有限生成无挠左 (右)R- 模是自反模的特征.

引理 3.1.3 设 R 是双边 Noether 环. 则下列条件等价

(1) 每个有限生成无挠左 (右)R- 模是自反的;

(2) $Ext_R^1(B,R)=0$ 对任意有限生成无挠左 (右)R- 模 B 成立;

(3) $\text{inj.dim}\, R_R \leqslant 1$.

证明 (1)⇒(2). 设 B 是任意有限生成无挠右 R- 模, 则存在一个有限生成无挠左 R- 模使得 (2.3) 成立. 故 $Ext_R^1(B,R)=0 \Leftrightarrow A$ 是自反的.

(2)⇒(3). 对 R_R, 有正合列: $0\to R_R\to E\to Q\to 0$(其中 E 是内射模). 只需证 Q 是内射模即可. 对于 B, 由引理 3.1.1, 存在有限自由模 F 使得下列序列正合

$$0 \xrightarrow{\eta_1} B \xrightarrow{\pi_1} F \to M \to 0.$$

由假设知, $Ext_R^1(B,R)=0$, 于是得下列两个正合列:

$$Hom_R(B,\ E) \xrightarrow{f} Hom_R(B,\ Q) \to Ext_R^1(B,\ R)=0,$$

$$Hom_R(F,\ Q) \xrightarrow{g} Hom_R(B,\ Q) \to Ext_R^1(M,\ Q) \to 0.$$

不难证明 g 是满同态, 故 $Ext_R^1(M,\ Q)=0$, 因此, 由内射准则知 Q 是内射模.

(3)⇒(1). 取 R_R 的一个内射分解:

$$0\to R_R\to E\to Q\to 0$$

设 $_RA$ 是有限生成无挠左 R- 模, 存在一个有限生成无挠右 R- 模 B 满足引理 3.1.2(2.3). 对于对 B, 存在正合列

$$0\to B\to F\to F/B=M\to 0.$$

由于 Q 是内射模, 有 $Ext_R^1(M,\ Q)=0$, 我们能证明 $Ext_R^1(B,\ R)=0$. 由引理 3.1.2(2.3) 知 A 是自反的. **证毕.**

上面这个引理我们在 π-coherent 中建立了与之相平行的结果. 下面的引理给出了在 Noether 环中每个有限生成左 (右)R- 模是自反模的特征, 这是一个极其重要的结果.

定理 3.1.1 设 R 是双边 Noether 环, 则下列条件等价:

(1) R 是左、右自内射环;

(2) 每个有限生成左 R- 模和每个有限生成右 R- 模都是自反的.

并且, 如果上述条件中的任意一个成立, 则 R 是左、右 Artin 环.

证明 (1)⇒(2). 假设 (1) 成立, 由引理 3.1.2(2.3) 和 (2.4) 知每个有限生成无挠右 (左)R- 模是自反的.

设 A 是任意有限生成左 R- 模，考虑下列交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C & \xrightarrow{\eta} & F & \xrightarrow{\pi} & A & \to & 0 \\ & & \downarrow \mu_C & & \downarrow \mu_F & & \downarrow \mu_A & & \\ 0 & \to & C^{**} & \xrightarrow{\eta^{**}} & F^{**} & \xrightarrow{\pi^{**}} & A^{**} & \to & 0 \end{array}$$

由 μ_C 和 μ_F 都是同构，由五引理知 μ_A 也是同构. 同理可证对右的情形也成立.

(2)⇒(1). 设 R/I 是任一个循环右 R- 模，由 (2) 知， R/I 是自反的，由引理 3.1.2(2.3) 知 $Ext_R^1(B/I,R)=0$. 因此 R 是右自内射环，同理可证 R 是左自内射环.

设 R 是左、右 Noether 环. 如果每个循环左、右 R- 模都是自反的，则 R 是左、右 Artin 环. 事实上，设 I 、 K 是右、左理想且 $K\subset I$(真包含). 考虑下列交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & I & \to & R & \to & R/I & \to & 0 \\ & & \downarrow inc & & \| & & \downarrow \phi & & \\ 0 & \to & K & \to & R & \to & R/K & \to & 0 \end{array}$$

其中 inc 是指包含映射， ϕ 是满同态但不同构. 我们将证明 $\phi^*:(R/K)^*\to(R/I)^*$ 也不是同构. 如果 ϕ^* 是同构，由于 R/I 和 R/K 都是自反的，从而有 ϕ 也是自反的，但这是不可能的. 故 ϕ^* 不是同构，于是 $l(I)\subset l(K)$(真包含). 因此如果 R 的左理想满足升链条件，则 R 的右理想满足降链条件. 同理， R 的左理想也满足降链条件.　**证毕**.

定义 3.1.1　环 R 称为 **quasi-Frobenius 环 (QF- 环)**, 如果 R 是左、右 Artin 环且在有限生成右 R- 模全子范畴 M_R^{fg} 和有限生成左 R- 模全子范畴 ${}_R^{fg}M$ 间存在一个 R- 对偶.

因此，任一个双边 Noether 环是 QF- 环当且仅当 R 是双边内射环. QF- 环是一类十分重要的环类，在一定意义上说，它是环论中最为核心的研究对象.

下面，我们介绍 Kato 利用自反性给出 QF- 环的一些有趣的刻画，同时也说明了在对偶理论中，循环模的对偶性才是最为本质的.

引理 3.1.4　对任意环 R, 下列条件等价:

(1) 任意左理想 L,R/L 是无挠的;

(2) $l(r(L))=L$.

证明　考虑下列交换图:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & (R/L)^* & \to & ({}_RR)^* \\ & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ & & r(L) & \to & R_R \end{array}$$

于是得正合列

$$0 \to (R/L)^* \to ({}_RR)^* \to R/r(L) \to 0,$$

由此得到下列交换图

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & R/r(L)^* & \to & ({}_RR)^* & \to & (R/L)^{**} \\ & & \uparrow\cong & & \uparrow\cong & & \uparrow \mu_{R/L} \\ & & l(r(L)) & \to & {}_RR & \to & R/L \end{array}$$

其中上行是正合的. 所以 $\mu_{R/L}$ 是单同态当且仅当 $l(r(L)) = L$. **证毕.**

定义 3.1.2 称右 R- 模 M 是一个 W- 模, 如果 $Ext^1_R(M, R) = 0$.

引理 3.1.5 设 R/I 是一个 W- 模, I 是右理想, 则 $I^* \cong R/l(I)$.

证明 考虑短正合列

$$0 \to l(I) \to R \to R/I \to 0,$$

用对偶函子作用得

$$0 \to (R/I)^* \to R \cong R^* \to l(I)^* \to 0,$$

再由 $(R/I)^* = Hom_R(R/I, R) \cong l(I)$ 可得 $I^* \cong R/l(I)$. **证毕.**

引理 3.1.6 设 $R/r(L)$ 是一个 W- 模, 则 $(R/L)^{**} \cong R/l(r(L))$.

证明 由于 $(R/L)^* \cong r(L)$, 由引理 3.1.5 知

$$(R/L)^{**} \cong (r(L))^* \cong R/lr(L)).$$

引理 3.1.7 对任意环 R, 下列条件等价:

(1) $\mu_{R/L}$ 是满同态;

(2) $Ext^1_R(R/r(L), R) = 0$.

证明 考虑正合列

$$0 \to (R/L)^* \to ({}_RR)^* \to R/r(L) \to 0,$$

可得下面交换图

$$\begin{array}{ccccc} ({}_RR)^{**} & \to & (R/L)^{**} & \to & Ext^1(R/r(L), R) \\ \uparrow\cong & & \uparrow \mu_{R/L} & & \\ {}_RR & \to & R/L & \to & 0 \end{array}$$

则 $\mu_{R/L}$ 是满同态当且仅当 $Ext^1_R(R/r(L), R) = 0$. **证毕.**

下面的定理给出了循环模的自反性的一个判别准则.

定理 3.1.2 下列条件等价:

(1) 对左理想 $L, R/L$ 是自反的;

(2) $l(r(L)) = L$ 且 $Ext_R^1(R/r(L), R) = 0$.

证明 由引理 3.1.4 、引理 3.1.6 和引理 3.1.7 易证. **证毕.**

下面, 我们给出自内射性的一个判别准则.

定理 3.1.3 对任意环 R, 下列条件等价:

(1) 对任意右理想 I, $R/l(I)$ 是自反的, 并且 I 到 R 的任何一个同态都能提升到 $rl(I)$;

(2) R 是右自内射环.

证明 假设 (1) 成立, 由定理 3.1.2 知 $Ext_R^1(R/r(L), R) = 0$, 故任意 $rl(I)$ 到 R 的同态都能提升到 R, 即证 R 是右自内射环. 反之, 由定理 3.1.2 和 $lrl(I) = l(I)$ 知 (1) 成立. **证毕.**

定理 3.1.4 若环 R 的 Jacobson 根是幂零的, 则下列条件等价

(1) 对任意左理想 L 和任意右理想 I, R/L 和 R/I 都是自反的;

(2) 每个有限生成左 R- 模和每个有限生成右 R- 模都是自反的;

(3) ${}_RR$ 和 R_R 都是内射的且 R 满足双零化子条件即对任意左理想 $L \leqslant_R R$ 以及右理想 $I \leqslant R_R$ 有

$$lr(L) = L, \text{ 并且 } rl(I) = I;$$

(4) R 是 QF 环.

证明 (1) $\Leftrightarrow$ (3). 由于 R/L 和 R/I 都是无挠的, 由引理 3.1.4 知, R 满足双零化子条件. 由定理 3.1.3 知, R 也是双边内射环. 反之, 由定理 3.1.2 易证.

(3) $\Leftrightarrow$ (2). 由 (1) 与 (3) 的等价性易知 (2)$\Rightarrow$(3) 成立. 反之, 用数学归纳法, 易证每个有限生成左 R- 模和每个有限生成右 R- 模都是自反的.

(4)$\Rightarrow$(1). 和 (1)$\Rightarrow$(4) 显然成立. **证毕.**

由双零化子条件可得下面的重要推论.

推论 3.1.1 设 R 为 QF- 环, 则对任意左理想 L 和任意右理想 I, 映射

$$L \mapsto r(L), \text{ 与 } I \mapsto l(I)$$

定义了环 R 的左右理想格之间互逆的反同构.

推论 3.1.2 若 R 为 QF- 环, 则 R 为双边 Kasch 环.

需要指出的是, QF- 环为 Kasch 环是 QF 的十分重要的性质之一. 我们已经知道域 k 上的有限群代数 kG 为 Frobenius 代数, 从而为 QF- 环. 事实上, 用表示论的语言, 有限群代数 kG 为 Kasch 环可翻译成 “有限群 G 的任意不可约表示都可由群代数 kG 的极小单边理想得到” 这在有限群的模表示论中是极为有趣的事实.

§3.2 quasi-Frobenius 的链条件刻画

在利用对偶性定义 QF- 环时，强调了她既是左自内射环，又是右自内射环. 事实上，只需定义它为单边内射性就行了，利用 Artin 环的理论可以证明它必然也是双边自内射环. 不仅如此，本节将证明在 QF- 环中左右内射性与左右链条件可以随意自由组合，这种对称性是 QF- 环一个十分重要的特征. 下面的定理总结了许多作者的工作，如 Eilenberg 、 Nakayama 和 Faith.

定理 3.2.1 下列关于环 R 的条件等价:

(1) R 是 QF- 环;

(2) R 左、右自内射环， R 是左、右 Artin 环;

(3) R 是右自内射环， R 是左、右 Noether 环;

(4) R 是右自内射环， R 是左 Artin 环;

(5) R 是右自内射环， R 是左 Noether 环;

(6) R 是右自内射环， R 是右 Noether 环.

证明 (2) $\Leftrightarrow$ (1). 由定理 3.1.1 易知.

(2) $\Rightarrow$ (3). 显然成立.

(3) $\Rightarrow$ (4). 设 $l(I_1) \supseteq l(I_2) \supseteq \cdots$ 是一个左零化子降链，于是得右零化子升链

$$rl(I_1) \subseteq rl(I_2) \subseteq \cdots.$$

由于 R 是右 Noether 环，存在一个自然数 n 使得

$$rl(I_n) = rl(I_{n+1}) = rl(I_{n+2}) = \cdots,$$

从而

$$l(I_n) = l(I_{n+1}) \cdots.$$

故 R 满足左零化子降链条件. 又由于 R 是右自内射环且 R 是左 Noether 环，由定理 3.1.4 知每个左理想都是左零化子. 故 R 满足左理想降链条件，即 R 是左 Artin 环.

(4) $\Rightarrow$ (5). 显然成立.

(5) $\Rightarrow$ (1). 由命题 2.3.1 知 R/J 是 V.N. 正则环. R/J 也是左 Noether 环，于是有 R/J 是半单的. 要证 R 是左 Artin 环，只须证 J 是幂零的即可. 由于 R 是右自内射环，且 R 是左 Noether 环，对每个左理想 ${}_RI$, 有 $l(r(I)) = I$.

令

$$r(J) \subseteq r(J^2) \subseteq r(J^3) \subseteq \cdots.$$

是一个左理想升链，由于 R 是左 Noether 环，故存在 n 使得

$$r(J^n) = r(J^{n+1}),$$

从而有

$$l(r(J^n)) = l(r(J^{n+1})),$$

故 $J^n = J^{n+1}$, 由 Nakayama 引理知 J 是幂等零的，从而 R 是左 Artin 环.

下面将证明 R 是右 Artin 环. 设 e 和 f 是 R 主不可分幂等元. 由于 eR 是 R_R 的直和项，有 eR 是内射的并且不可分，故 $Soc(eR)$ 是单 R- 模，且 $Soc(eR) \cong \mathrm{Soc}(fR)$ 当且仅当 $eR \cong fR$. 由于 R 是左 Artin 环，则 R 是半完全环. 由半完全环的结果知，每个单右 R- 模同构于 $\mathrm{Soc}(fR)$. 故 R 是右 Kasch 环，于是有 ${}_RR$ 是余生成元，因此，每个右理想都是零化子. 设

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$$

是一个右理想降链，则

$$l(I_1) \subseteq l(I_2) \subseteq l(I_3) \subseteq \cdots$$

是一个左理想升链，由于 R 是左 Noether 环，所以存在一个 n 使得

$$rl(I_n) = rl(I_{n+1}),$$

从而有 $I_n = I_{n+1}$, 故 R 是右 Artin 环.

由于 R 是右自内射环，由 Ikeda-Nakayama 定理知，对任意有限生成左理想 L 有 $l(r(L)) = L$. 又因为是 R 是左 Artin 环，故对任意左理想均是零化子. 由上面知，R 是余生成元，故对任意右理想 I 有 $r(l(I)) = I$, 即 R 满足双边零化子条件. 从而易证 R 是双边自内射环. 故 R 是 QF- 环.

(5)⇒(6). 由上面的证明可得.

(6)⇒(5). 因为 R 为右自内射环，由 Ikeda-Nakayama 定理知任意有限生成左理想都是零化子. 因此 R 对有限生成左理想满足降链条件，从而 R 是右完全环. 由定理 2.3.1 知，R/J 是 V.N. 正则环，R/J 也是右 Noether 环，从而有 R/J 是半完全环. 下面证明 J 是幂零的，从而由著名的 Hopkins-Levitzki 定理知 R 为 Artin 环.

为证 J 是幂零的，考虑升链

$$r(J) \subseteq r(J^2) \subseteq \cdots \subseteq r(J^n) \subseteq \cdots,$$

由假设知存在 n 使得

$$r(J^n) = r(J^{n+1}).$$

如果 $J^n \neq 0$, 则由 R 为右完全环知对非零 R- 模 $R/r(J^n)$ 有, $Soc(R/r(J^n)) \neq 0$ 且存在 $T \supset r(J^n)$ 使得

$$Soc(R/r(J^n)) = T/r(J^n).$$

由于 $T/r(J^n)$ 是半单的, $T/r(J^n)$ 的 Jacobson 根为零, 故 $JT \subseteq r(J^n)$, 即

$$T \subseteq r(J^{n+1}) = r(J^n).$$

于是, $T = r(J^n)$ 矛盾. 故 $J^n = 0$. **证毕.**

推论 3.2.1 设 R 为 QF- 环, 其 Jacobson 根 $J := radR$. 则

$$l(J) = Soc(_RR) = Soc(R_R) = r(J).$$

证明 因为 R 为双边自内射环, 故 $Soc(_RR) = Soc(R_R)$ 成立. 又由 R 为 Artin 环可得 $l(J) = Soc(_RR)$ 并且 $Soc(R_R) = r(J)$. **证毕.**

§3.3 Nakayama 置换

设 R 为 QF- 环, 则对偶函子 $(_)^* = Hom_R(_, R) : M_R \to_R M$ 是反变正合函子. 再由 Morita 对偶理论知, 有限生成右 R- 模范畴 $\boldsymbol{M}_R^{fg}$ 和有限生成左 R- 模范畴 ${}_R^{fg}\boldsymbol{M}$ 间存在着一个完全对偶

$$\boldsymbol{M}_R^{fg} \Leftrightarrow {}_R^{fg}\boldsymbol{M}.$$

由此可得下面的命题.

命题 3.3.1 设 R 为 QF- 环, 并令 M 为右 R- 模. 则 M 为单右 R- 模, 当且仅当其对偶模 M^* 为单左 R- 模.

下面我们将证明, 对 Artin 环, 单模的对偶模的单性实际上可以刻画 QF- 环, 这个定理是由 Dieudonne 给出的.

定理 3.3.1 设 R 为右 Artin 环. 则以下条件等价:

(1) R 为 QF- 环;

(2) 任意单 R- 模的对偶模为单模.

证明 (2)⇒(1). 首先证明若 $A \subseteq B$ 为环 R 的右理想且使得 $(B/A)^*$ 为单右 R- 模, 则有 $l(A)/(B) \cong (B/A)^* := Hom_R(B/A, R)$. 为此定义同态 $f : l(A) \to (B/A)^*$ 使得对任意 $x \in l(A), b \in B$ 都有

$$f(x)(b + A) = xb,$$

则 $\ker(f) = l(B)$. 因此 $l(A)/(B)$ 可以嵌入 $(B/A)^*$. 再由 $(B/A)^*$ 的单性知 $l(A)/(B) \cong (B/A)^*$.

现由 R 为右 Artin 环知，对右正则模 R_R 存在合成列

$$0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n = R_R,$$

由假设知每个 $(A_{i+1}/A_i)^*$ 都是单左 R- 模或 0. 因而每个 $l(A_i)/l(A_{i+1})$ 都是单左 R- 模或 0. 因此如果忽略掉可能消失的那些因子，则可得左正则模 ${}_RR$ 的合成列

$$(*) \qquad 0 = l(A_n) \subseteq \cdots \subseteq l(A_i) \subseteq \cdots \subseteq l(A_0) = {}_R R.$$

由此可得合成列长度的关系 $leng({}_RR) \leqslant leng(R_R)$. 由对称性，同样可得 $leng(R_R) \leqslant leng({}_RR)$, 因此 $leng(R_R) = leng({}_RR)$. 从而序列 (*) 中没有可能消失的因子，即序列 (*) 确实为左正则模 ${}_RR$ 的合成列. 再对序列 (*) 取右零化子，则同理可得右正则模 R_R 的合成列

$$0 = rl(A_0) \subseteq rl(A_1) \subseteq \cdots \subseteq rl(A_n) = R_R.$$

比较右正则模 R_R 的这两个合成列，再由 $A_i \subseteq rl(A_i)$ 可知 $A_i = rl(A_i)$. 再由 Jordan -Holder 定理及 Schreier 加细定理可知环 R 的每个右理想都可以出现在合成列

$$0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n = R_R$$

中，故环 R 满足右理想的双零化子条件. 再由对称性知环 R 也满足左理想的双零化子条件. 进而由 R 右 Artin 环即证 R 为 QF- 环. **证毕**.

接下来，我们利用 Kasch 环给出 QF- 环的一个新的刻画，在此刻画中主不可分解模起着极为关键的作用.

定理 3.3.2 设 R 为 Artin 环，则以下条件等价：

(1) R 为 QF- 环;

(2) R 为双边 Kasch 环，并且每个单边主不可分解 R- 模具有单基座.

证明 (1)⇒(2). 因为 R 为 QF- 环，故 R 为 Kasch 环. 现对任意本原幂等元 $e^2 = e \in R$, 考虑相应的主不可分解右 R- 模 eR. 注意到 R 为自内射环，故 eR 内射. 现设 M 为 eR 的任意单子模，则显然其内射包 $E(M) = eR$, 从而 M 为 eR 的本质子模. 特别地有 $Soc(eR) = M$ 为单模. 由对称性知 $Soc(Re)$ 也为单模.

(2) ⇒ (1). 首先证明 $Soc(R_R) = Soc({}_RR)$. 现设 $e^2 = e \in R$ 为任意本原幂等元. 由 R 为 Kasch 环知单模 $\overline{Re} := Re/Je$ 可以嵌入左正则模 ${}_RR$, 从而 $Soc({}_RR)$ 包含了与 $\overline{Re} := Re/Je$ 同构的某个极小理想，故 $e \cdot Soc({}_RR) \neq 0$. 因为 $Soc({}_RR)$ 为双边理想，故 $e \cdot Soc({}_RR) \neq 0$ 为 eR 的非零右子模. 再由 $Soc(eR)$ 的单性可得 $Soc(eR) \subseteq e \cdot Soc({}_RR) \subseteq Soc({}_RR)$. 现设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为完全正交本原幂等元集，则

$$R_R = e_1R \bigoplus \cdots \bigoplus e_nR,$$

进而由基座的性质得.

$$Soc(R_R) = Soc(e_1R)\bigoplus\cdots\bigoplus Soc(e_nR).$$

由此可知 $Soc(R_R) \subseteq Soc(_RR)$. 再由对称性可得 $Soc(_RR) \subseteq Soc(R_R)$, 即证 $Soc(R_R) = Soc(_RR)$.

现设 M 为任意单右 R- 模. 则由 R 为 Kasch 环知 M 可以嵌入 R_R, 因而也可以嵌入某个主不可分解右 R- 模 eR. 因此可假定 $M = Soc(eR)$. 我们断言

$$M^* = (Soc(eR))^* \cong \overline{Re}$$

则表明单模 M 的对偶模 M^* 为单模. 并且, 由对称性知每个单左 R- 模的对偶模也为单模. 又因为 R 为右 Artin 环, 故由定理 3.3.1 即 Dieudonne 定理可知 R 为 QF- 环.

为证 $M^* = (Soc(eR))^* \cong \overline{Re}$, 定义左 R- 模同态 $\sigma : Re \to M^*$ 为:

$$\sigma(re)(m) = rem, \text{ 对任意 } re \in Re \text{ 及} m \in M,$$

则由 $Soc(R_R) = Soc(_RR)$ 可得

$$\sigma(Je)(M) = J(eM) \subseteq J\cdot Soc(_RR) = J\cdot Soc(R_R) = 0.$$

因此 $\sigma : Re \to M^*$ 可诱导同态 $Re/Je \to M^*$. 因为 $Re/Je \cong \overline{Re}$ 为单模, 故只需证明 $Re/Je \to M^*$ 为满同态. 为此, 我们注意到由 R 为 Kasch 环可知存在本原幂等元 $f^2 = f \in R$ 使得 $M \cong \overline{fR}$, 并设在此同构下 $\overline{f}$ 的原像为 $m \in M$, 则 $M = mR$. 并且由 $mf \in M$ 对应于 $\overline{ff} = \overline{f}$ 可知 $m = mf$. 现任取 $0 \neq \varphi \in M^*$, 并令

$$m' := \varphi(m) = \varphi(mf) = m'f \in \varphi(M) \cong M,$$

再由 $Soc(R_R) = Soc(_RR)$ 可得

$$m \in Rf\bigcap M \subseteq Rf\bigcap Soc(R_R) = Rf\bigcap Soc(_RR) \subseteq Soc(Rf).$$

同理可得 $m' \in Soc(Rf)$. 又由假设知 $Soc(Rf)$ 为单模, 从而 $Rm = Soc(Rf) = Rm'$. 特别地, 存在 $r \in R$ 使得 $m' = rm$. 注意到 $M \subseteq eR$, 则对任意 $x \in R$ 有

$$\varphi(mx) = \varphi(m)x = m'x = rmx = (re)(mx)$$

因此 φ 可表为 re 的左乘. **证毕.**

推论 3.3.1 设 R 为 QF- 环, e、$f \in R$ 为本原幂等元. 若 $Soc(eR) \cong \overline{fR} = fR/fJ$, 则

(1) $(\overline{fR})^* \cong \overline{Re} := Re/Je$;

(2) $(\overline{Re})^* \cong \overline{fR}$;

(3) $Soc(Rf) \cong \overline{Re}$.

证明　(1) 由以上定理 3.3.2 的证明可知，(2) 由对偶函子作用于 (1) 可得. 为证 (3), 由 (1) 的对称形式可得 $(Soc(Rf))^* \cong \overline{fR}$, 取对偶并由 (1) 得 $Soc(Rf) \cong (\overline{fR})^* \cong \overline{Re}$.　**证毕.**

设 R 是任意有单位元 1 的右 Artin 环. 则由块分解定理知，1 可惟一地分解成正交本原幂等元 $e_{11},\cdots,e_{1n_1},\cdots,e_{s1},\cdots e_{sn_s}$ 的和，即

$$1 = e_{11} + \cdots + e_{1n_1} + \cdots + e_{s1} + \cdots + e_{sn_s},$$

其中 $e_i := e_{i1}$ 互不同构，但是 e_i 与每个 e_{ij} 都同构.
现记

$$U_i := e_iR,\ \ U_i' := Re_i,$$

则 $\{U_i \mid 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 为主不可分解右 R- 模的完备集，相应地 $\{U_i' | 1 \leqslant i \leqslant s\}$ 为主不可分解左 R- 模的完备集，并且有

$$R_R \cong n_1U_1 \bigoplus \cdots \bigoplus n_sU_s.$$

从而易知 e_iJ 是 $U_i = e_iR$ 中惟一的极大子模. 若令

$$S_i := \bar{e_i}\,\bar{R} \cong e_iR/e_iJ,\quad S_i' := \bar{R}\,\bar{e_i} \cong Re_i/Je_i$$

则 $\{S_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是单右 R- 模的完备集，$\{S_i' \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$ 是单左 R- 模的完备集，并且有

$$\bar{R}_{\bar{R}} \cong n_1S_1 \bigoplus \cdots \bigoplus n_kS_k,$$

再由 Wedderburn-Artin 定理，可得 $\bar{R}$ 的结构定理

$$\bar{R} \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k),$$

其中 $D_i \cong End_{\bar{R}}(S_i) = End_R(S_i)$ 为除环.

现设 R 为 QF- 环，则可定义映射 $\pi : \{1,\cdots,s\} \to \{1,\cdots,s\}$ 使得对任意 $i = 1,\cdots,s$, $\pi(i)$ 全由下式决定

$$Soc(U_i) \cong S_{\pi(i)}.$$

则由推论 3.3.1 可得

$$Soc(U_{\pi(i)}' \cong S_i',\ S_{\pi(i)}{}^* \cong S_i{}',\ (S_i')^* \cong S_{\pi(i)},$$

由此可知 π 为 $\{1,\cdots,s\}$ 的一个置换，称之为 **Nakayama 置换**.

利用 Nakayama 置换可以给出 quasi-Frobenius 环的 Nakayama 刻画，这也是 quasi-Frobenius 环的原始定义 (见文献 [102]).

定理 3.3.3 一个有单位元的右 Artin 环 R 是 quasi-Frobenius 环，当且仅当存在 Nakayama 置换 $\pi:\{1,\cdots,s\}\to\{1,\cdots,s\}$ 使得对所有 $1\leqslant i\leqslant k$ 有

$$Soc(U_i)\cong S_{\pi(i)}\ ,\quad Soc(U_i{}')\cong S'_{\pi(i)}$$

成立.

证明 充分性. 假定 Nakayama 置换 π 存在，则 $S_{\pi(i)}$ 和 S'_i 都能嵌入 R 中，所以 R 为 Kasch 环. 同时， Nakayama 置换 π 的存在性表明每个主不可分解模都具有单基座. 因此，R 为 QF- 环. **证毕**.

利用 Nakayama 置换，我们还可以考虑主不可分解 R- 模的对偶模.

推论 3.3.2 设 R 为 QF- 环，则有

$$U_i^*\cong U'_i,\ \text{并且}\ (U'_i)^*\cong U_i.$$

§3.4 Frobenius 环

现在我们利用上节末的记号给出 Frobenius 环的概念，这是一类重要的环.

现设 R 为 QF- 环，则存在 Nakayama 置换 $\pi:\{1,\cdots,s\}\to\{1,\cdots,s\}$ 使得对任意 $i=1,\cdots,s$ 有

$$Soc(U_i)\cong S_{\pi(i)},\quad Soc(U'_{\pi(i)})\cong S_i{}'.$$

定义 3.4.1 称有单位元的右 Artin 环 R 为 Frobenius 环，如果 R 为 QF- 环并且其相应的 Nakayama 置换 $\pi:\{1,\cdots,s\}\to\{1,\cdots,s\}$ 对所有 $1\leqslant i\leqslant k$ 有 $n_i=n_{\pi(i)}$，其中 n_i 为下同构式中的自然数数字 $\overline{R}\cong M_{n_1}(D_1)\times\cdots\times M_{n_k}(D_k)$.

下面我们给出 Frobenius 环的一些等价刻画.

定理 3.4.1 设 R 为任意有单位元的 Artin 环，令 $J=radR$, 并设 $\overline{R}=R/J$. 则以下条件等价:

(1) R 为 Frobenius 环;

(2) R 为 quasi-Frobenius 环，并且 $Soc(R_R)\cong\overline{R}_R$;

(3) R 为 quasi-Frobenius 环，并且 $Soc({}_RR)\cong_R\overline{R}$;

(4) $Soc({}_RR)\cong_R\overline{R}$, 并且 $Soc(R_R)\cong\overline{R}_R$.

证明 (2)⇒(1). 由 R 为 Artin 环并由上面讨论知

$$R_R\cong n_1U_1\bigoplus\cdots\bigoplus n_sU_s.$$

从而其基座

$$Soc(R_R) \cong n_1 Soc(U_1) \bigoplus \cdots \bigoplus n_s Soc(U_s).$$

又由 R 为 QF- 环知存在 Nakayama 置换 $\pi : \{1, \cdots, s\} \to \{1, \cdots, s\}$, 使得对所有 $1 \leqslant i \leqslant k$ 有 $Soc(U_i) \cong S_{\pi(i)}$, 由此可得

$$Soc(R_R) \cong n_1 S_{\pi(1)} \bigoplus \cdots \bigoplus n_s S_{\pi(s)}.$$

再由 $\overline{R} = R/J$ 为半单环可得

$$\overline{R}_R \cong n_1 S_1 \bigoplus \cdots \bigoplus n_s S_s.$$

比较两者可知 (2)⇒(1).

(4) ⇒ (1). 只需证明 R 为 QF- 环. 因为所有的 S_i 都出现在 $\overline{R}_R$ 中, 因而也出现在 $Soc(R_R)$ 中, 由此可知 R 为右 Kasch 环. 由对称性知 R 为左 Kasch 环. 进而可得

$$\bigoplus_i n_i \cdot S_i \cong \overline{R}_R \cong Soc(R_R) \cong \bigoplus_i n_i \cdot Soc(U_i),$$

显然 $\bigoplus_i n_i \cdot S_i$ 的合成长度为 $\sum_i n_i$, 而 $\bigoplus_i n_i \cdot Soc(U_i)$ 的合成长度为 $\sum_i n_i \cdot leng(Soc(U_i))$. 因为每个 $Soc(U_i)$ 的合成长度 $leng(Soc(U_i)) > 0$, 因而必有 $leng(Soc(U_i)) = 1$, 故每个 $Soc(U_i)$ 都为单模. 再由对称性知每个 $Soc(U_i')$ 也为单模. 由定理 3.3.2 知 R 为 QF- 环. 其余结论是显然的.　　**证毕.**

为能利用对偶性给出 Frobenius 环的刻画, 我们需要研究 QF- 环的基座的双模结构.

命题 3.4.1　设 R 为 QF- 环, 并记 $Soc(R) = Soc(R_R) = Soc({}_RR)$. 则存在 (R, R)- 双模同构

$$Soc(R) \cong ({}_R\overline{R})^* \cong (\overline{R}_R)^*.$$

证明　由对称性, 只需证明存在 (R,R)- 双模同构 $Soc(R) \cong ({}_R\overline{R})^*$. 因为 $Soc(R) = Soc(R_R) = Soc({}_RR)$ 为双边理想, 故 $l(Soc(R))$ 也为双边理想. 由此可知 $R/l(Soc(R))$ 为 (R, R)- 双模. 同时因为 $Soc(R)$ 具有 (R, R)- 双模结构, 其对偶模 $Soc(R)^*$ 也具有自然的 (R, R)- 双模结构如下

$$r(fr')(s) = f(rr's) \in R_R, \quad \forall f \in Soc(R)^*, \ \ r, r' \in R, \ \ s \in Soc(R).$$

又由 R 为 QF- 环知自然映射

$$R/l(Soc(R)) \to Soc(R)^*$$

为 (R, R)- 双模同构. 再注意到 $Soc(R) = r(J) = l(J)$, 可得 (R, R)- 双模同构

$$Soc(R)^* \cong R/l(Soc(R)) = R/lr(J) = R/J = \overline{R},$$

将此同构看作左 R- 模同构, 并取其对偶模, 即得 (R, R)- 双模同构 $Soc(R) \cong ({}_R\overline{R})^*$. **证毕**.

定理 3.4.2 设 R 为 QF- 环, 则以下条件等价:

(1) R 为 Frobenius 环;

(2) 作为右 R- 模有 $\overline{R}_R \cong ({}_R\overline{R})^*$;

(3) 作为左 R- 模有 ${}_R\overline{R} \cong (\overline{R}_R)^*$.

证明 因为 R 为 QF- 环, 若令 $Soc(R) := Soc(R_R) = Soc({}_RR)$, 则存在 (R, R)- 双模同构

$$Soc(R) \cong ({}_R\overline{R})^* \cong (\overline{R}_R)^*.$$

现只考虑单边同构的情形, 则 $Soc(R_R) \cong \overline{R}_R$ 当且仅当作为右 R- 模有同构 $\overline{R}_R \cong ({}_R\overline{R})^*$, 而 $Soc({}_RR) \cong_R \overline{R}$ 当且仅当左 R- 模有 ${}_R\overline{R} \cong (\overline{R}_R)^*$. **证毕**.

推论 3.4.1 设 R 为 QF- 环. 若存在自然数 $n \geqslant 1$ 以及除环 $D_1, \cdots D_s$ 使得

$$\overline{R} \cong M_n(D_1) \times \cdots \times M_n(D_s).$$

则 R 为 Frobenius 环.

证明 因为 $\overline{R} \cong M_n(D_1) \times \cdots \times M_n(D_s)$, 故在表达式

$$1_R = e_{11} + \cdots + e_{1n_1} + \cdots + e_{s1} + \cdots + e_{sn_s}$$

中有 $n_1 = \cdots = n_s = n$. 从而相应的 Nakayama 置换 $\pi : \{1, \cdots, s\} \to \{1, \cdots, s\}$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant k$ 成立 $n_i = n = n_{\pi(i)}$. 因而 R 为 Frobenius 环. **证毕**.

最后我们揭示 Frobenius 环与 Frobenius 代数之间的直接联系. 我们将证明 R 为域 k 上 Frobenius 代数当且仅当 R 具有 Frobenius 环结构, 而与域 k 的具体选择无关, 重要的是 R 要具有有限 k- 维数.

定理 3.4.3 设 R 为域 k 上的有限维代数. 则 R 为域 k 上 Frobenius 代数当且仅当 R 为 Frobenius 环.

证明 若 R 为域 k 上 Frobenius 代数, 则由定理 2.2.1 知 R 为自内射环. 又因为 R 显然为右 Artin 环, 故 R 为 QF- 环. 现令 $\overline{R} = R'/J$, 并考虑 k- 对偶模 $R^* := Hom_k(R, k)$, 则由内射生成引理知 R_R^* 内射. 我们断言 $Soc((R^*)_R) = \overline{R}_R$. 现令 $S = Soc((R^*)_R)$. 因为 R 为右 Artin 环, 故每个非零右 R- 模都包含一个单子模, 由此可知 $S \subseteq_e (R^*)_R$, 从而 $E(S) = R^*$. 同时由 R 为右 Artin 环知

$$\begin{aligned} S &= \{f \in R^* \mid f \cdot J = 0\} \\ &= \{f \in R^* \mid f(J) = 0\} \\ &\cong \overline{R}^*. \end{aligned}$$

又因为 $\overline{R}$ 为半单代数, 故 $\overline{R}$ 为 Frobenius 代数, 从而 $(R/J)^* \cong R/J$, 这是右 $\overline{R}$- 模同构, 也是右 R- 模同构. 由此可得 $S \cong \overline{R}_R$, 进而有 $R^* \cong E(\overline{R}_R)$, 即证得 $Soc((R^*)_R) =$

$\overline{R}_R$. 又因为 R 为域 k 上 Frobenius 代数，故存在右 R- 模典范同构 $(R^*)_R \cong R_R$, 进而有

$$\overline{R}_R \cong Soc((R^*)_R) \cong Soc(R_R),$$

再由定理 3.4.2 知 R 为 Frobenius 环.

现假设 R 为 Frobenius 环，则 R 为 QF- 环，同时有 $\overline{R}_R \cong Soc(R_R)$. 同样考虑 k- 对偶模 $R^* = Hom_k(R,k)$, 则作为右 R - 模有 $R^* \cong E(\overline{R}_R)$. 另一方面，因为 R 为右 Artin 环，故其右基座 $Soc(R_R) \subseteq_e R_R$. 又因为 R_R 为内射模，所以 $E(Soc(R_R)) = R_R$. 因此由 $\overline{R}_R \cong Soc(R_R)$ 取内射包可得 $(R*)_R \cong R_R$, 即证 R 为域 k 上 Frobenius 代数.　　**证毕**.

推论 3.4.1　设 k 为任意域，R 为有限维交换 k- 代数. 则 R 为域 k 上 Frobenius 代数当且仅当 R 为自内射环.

历史上， Frobenius 环最早是以 Frobenius 代数的形式出现在 Brauer, Nesbiit, Nakayama 等人的文章中. 20 世纪 30 年代，Nesbitt-Thrall 作为有限群代数的推广引入了 Frobenius 代数的概念, 这类代数具有很好的对偶性质. 事实上, 正是有限群的表示理论刺激了对域上有限维代数的研究. 除了与群表示论的联系外，Frobenius 环也出现在代数的其他分支中. 例如，交换局部 Frobenius 环恰好就是零维局部 Groenstein 环，这类环在交换代数、代数数论、代数几何及组合论中都有重要的应用. 在拓扑与几何中，Frobenius 环作为紧致定向流形的上同调环和某种紧致 Kahler 流形的量子上同调环出现. Frobenius 代数也被证明在 Hopf 代数中出现. 近年来 Frobenius 代数已经出现在 Yang-Baxter 方程求解工作中. 事实上， Frobenius 环的应用已经超出了纯数学的范畴. 例如， Wood 的工作表明 Frobenius 环可以应用于编码理论.

域 k 上的代数的概念可以很自然地进行推广. 20 世纪 50 年代， Eilenberg-Nakayama 成功地将 Frobenius 代数的理论扩展到了交换环上. 设 k 为任意交换环，如果 R 作为 k- 模有限生成投射，则称 R 为 k- 代数. 利用 R 的左 R- 模结构，我们同样可以考虑 k- 对偶 $R^* := Hom_k(R,k)$ 的右 R- 模结构. 称代数 R 为 k-Frobenius 代数，如果存在右 R- 模同构 $R_R \cong (R^*)_R$. 特别地，若 k 本身为 Frobenius 环，则 R 为 k-Frobenius 代数当且仅当 R 为 Frobenius 环. 这样，我们就可以得到更多的 Frobenius 代数的例子. 例如，取 $k = Z/nZ$, 则我们可以考虑 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Frobenius 代数. 这种在更广的框架下研究 Frobenius 代数对于编码理论是十分有用的. 事实上， Wood 的工作表明有限域上的经典编码理论的许多结果都可以推广到有限维交换 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-Frobenius 代数上.

鉴于主不可分解模在 Frobenius 环研究中的重要性，我们顺便介绍与此有关的 Cartan 矩阵的概念. 与前相同，设 R 为任意有单位元的右 Artin 环，并设 $e_1, \cdots e_s$ 为相应的本原幂等元完备集. 则 $\{U_i = e_iR\}$ 为主不可分解右 R- 模的完备集，并令

$S_i = \bar{e_i}\bar{R} \cong e_iR/e_iJ$ 为相应的单商模.

定义 3.4.2 设 R 为有单位元的右 Artin 环. 对任意 $i, j \in \{1, \cdots, s\}$, 称 $U_i := e_iR$ 中与 $S_j = \bar{e_j}\bar{R} \cong e_jR/e_jJ$ 同构的合成因子的个数 $c_{ij} \geqslant 0$ 为 Cartan 不变量, 并定义环 R 的 (右)Cartan 矩阵 C 为

$$C = (c_{ij}) \in M_s(Z).$$

Cartan 矩阵有许多有趣的性质. 例如, 考虑特征为 p 的域 k 上的有限群 G 的群代数 kG, 若 p 整除 $|G|$, 则对群代数 kG 的 Cartan 矩阵的研究成为有限群模表示论的重要内容.

§3.5 交换 quasi-Frobenius 环

在给出一般性的例子之前, 我们先来看熟悉的有限群环. 事实上, 有限群环提供了大量的非半单 QF- 环的例子.

定理 3.5.1 设 R 为 QF- 环, 并且 G 为有限群. 则群环 RG 为 QF- 环.

证明 因为 R 为 QF- 环, 故为 Artin 环, 因而为 Noether 环. 又由 G 为有限群知, 群环 RG 是有限生成 R- 模, 因而具有有限合成长度. 由此可知群环 RG 的每个单边理想都将具有有限合成长度, 因此 RG 为 Noether 环. 由于 G 为有限群, 再由 Connell-Renault 定理可知群环 RG 为自内射环, 因而为 QF- 环.

证毕.

前面我们证明了 R 为域 k 上 Frobenius 代数当且仅当 R 具有 Frobenius 环结构, 而与域 k 的具体选择无关, 重要的是 R 要具有有限 k- 维数. 同样的结论对 QF- 环也成立.

定理 3.5.2 设 k 为任意域, R 为域 k 上有限维代数. 则 R 为 quasi-Frobenius 代数当且仅当 R 为 QF- 环.

证明 首先假设 R 为 QF- 代数. 由内射生成引理知, k- 对偶 $R^* := Hom_k(R, k)$ 作为右 R- 模内射, 因而其 Krull-Schmidt 不可约分支作为右 R- 模也内射. 再由 R 为 QF- 代数知右正则模 R_R 与 $(R^*)_R$ 有相同的 Krull-Schmidt 不可约分支. 由此可知 R_R 内射, 从而 R 为 QF- 环.

现假设 R 为 QF- 环. 令 $e_1, \cdots, e_s \in R$ 为本原幂等元的完备集. 注意到任意不可分解左 R- 模 Re_i 的 k- 对偶 $(Re_i)^*$ 为不可分解右 R- 模. 再由内射生成引理知 $(Re_i)^*$ 为内射右 R- 模, 从而为投射右 R- 模. 因此每个 $(Re_i)^*$ 都出现在某个自由模 R_R^n 中, 因而由 Krull-Schmidt 定理知 $(Re_i)^*$ 出现在 R_R 中. 同时注意到 $(Re_1)^*, \cdots, (Re_s)^*$ 为不可分解内射右 R- 模的完备集, 则

$$R_R \cong m_1(Re_1)^* \bigoplus \cdots \bigoplus m_s(Re_s)^*, \quad m_i > 0.$$

另一方面，因为 $Re_1, \cdots, Re_s$ 为不可分解内射左 R- 模的完备集，故

$$_RR \cong n_1Re_1 \bigoplus \cdots \bigoplus n_sRe_s, \quad n_i > 0,$$

由此可得

$$(R^*)_R \cong n_1(Re_1)^* \bigoplus \cdots \bigoplus n_s(Re_s)^*.$$

因而 $(R^*)_R$ 与 R_R 有相同的 Krull-Schmidt 不可约分支，即证 R 为 QF- 代数.

证毕.

接下来，我们将研究交换 QF- 环的结构.

定理 3.5.3　对任意交换环 R, 以下条件等价：

(1) R 为 QF 环;

(2) R 为 Artin 环，并且其基座 $Soc(R)$ 中不包含同构的单 R- 模;

(3) $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$, 其中每个 R_i 都是具有单基座的局部 Artin 环.

证明　(1)⇒(2). 假定基座 $Soc(R)$ 包含 $A \oplus B$, 其中 A, B 为同构的单 R- 模，设 $\varphi: A \to B$ 为相应的 R- 同构. 因为 R_R 内射，φ 可表示为某个 $r \in R$ 的左乘. 但是 $B = rA \subseteq A$, 矛盾.

(2) ⇒ (3). 设 $1_R = e_1 + \cdots + e_n$ 为单位元 1_R 分解为正交本原幂等元的和，并令 $R_i = e_iR$. 则每个 R_i 是局部 Artin 环，并且 R_i 只有惟一的单模，所以每个 R_i 都是具有单基座的局部 Artin 环. 显然有 $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$.

(3) ⇒ (1). 只需证明每个 R_i 为 QF- 环. 因此，我们可以假定 R 为局部环，并且 $V := Soc(R)$ 为单. 因为 R 为 Artin 环，所以每个非零理想包含一个极小理想，这只能是 V. 因此，$V \lhd R$, 并且我们可以假定 $R \subseteq E = E(V)$. 现在 V 是惟一的单 R- 模，所以合成长度 $leng(E) = leng(R)$. 因而一定有 $R = E$. 这表明 R 是自内射环，因而为 QF- 环.　**证毕.**

由此定理可见，在交换环所成的范畴中，具有单基座的局部 Artin 是 QF- 环的基本构成单位. 事实上，在交换代数和代数几何中，具有单基座的局部 Artin 环被称作零维局部 Gorenstein 环，因而交换 QF- 环具有基本的重要性.

在域 k 上有限维交换代数的情形，QF- 环的基本构成块实际上就是交换局部 Frobenius 代数，下面给出这类 Frobenius 代数的特征，我们省去其证明.

定理 3.5.4　设 R 为域 k 上有限维交换局部代数，则以下条件等价：

(1) R 为 Frobenius 代数;

(2) R 为自内射代数;

(3) R 具有惟一的极小理想.

第 4 章　quasi-Frobenius 环与投射模、内射模

在第 3 章，我们主要利用对偶性的语言给出了 QF- 环的一些特征性质. 本章我们首先利用投射模和内射模给出 quasi-Frobenius 环的同调刻画，即 QF- 环的特征是其模范畴中内射模与投射模是一致的，这是一个深刻的结果. 利用 QF- 环的这个特征，我们得到了 QF- 环的一个自然推广：IF- 环，即内射模为平坦模的环类，我们给出了这类环的特征性质.

§4.1　内射模的投射性

首先我们研究内射模的投射性，进而给出 QF- 环的同调刻画.

为此我们需要一些准备工作.

命题 4.1.1　设 R 为半局部环，并且令 P 为右 R- 模范畴的有限生成投射余生成元. 则 P 与 R 都是内射右 R- 模.

证明　设 $V_1, \cdots, V_n$ 为互不同构的单右 R- 模的完全代表集. 因为 P 是余生成元, 故可以假定诸 $E(V_i)$ 包含在 P 中, 因而 $E(V_i)$ 也是有限生成投射右 R- 模. 又因为 $V_1, \cdots, V_n$ 为互不同构的单右 R- 模的完全代表集，所以 $E(V_1), \cdots, E(V_n)$ 相互独立, 从而 $C = E(V_1) \bigoplus \cdots \bigoplus E(V_n)$ 是既投射又内射的右 R- 模. 又由半局部环的性质知，$E(V_i)/E(V_i)J$ 也是互不同构的单右 R- 模的完全集. 换句话说，每个单右 R- 模都是 $C = E(V_1) \bigoplus \cdots \bigoplus E(V_n)$ 的满同态像. 因为 $C = E(V_1) \bigoplus \cdots \bigoplus E(V_n)$ 投射，所以 C 是右 R- 模范畴的生成元. 因此，存在短正合列

$$C^{(A)} \to R \to 0$$

因为 R_R 投射，所以该短正合列分裂，因而 R 同构于 $C^{(A)}$ 的直和项. 又因为 R_R 有限生成，所以不妨假设 $C^{(A)}$ 的为 R 的有限直和，从而 C 的内射性表明 R_R 内射. 由此可得 P 的内射性.　　**证毕**.

推论 4.1.1　若 R 是半局部环, 并且 R_R 是 R- 模范畴的余生成元, 则 R 为右自内射环.

下面这个定理是由 Faith-Walker 给出的.

定理 4.1.1　对任意环 R, 下列论述等价：

(1) R 是 quasi-Frobenius 环;

(2) 任意内射右 R- 模均为投射模.

证明 (1)⇒(2). 假设 R 是 quasi-Frobenius 环, E 是任意内射右 R- 模. 由于 R 是 quasi-Frobenius 环, 从而根据著名的 Matlis-Papp 定理, 内射模 E 可分解成不可分解内射子模的直和. 又因为投射模的直和投射, 所以我们不妨假定 E 本身是不可分解内射模.

由于 R 是 quasi-Frobenius 环, 所以 R 是 Artin 环, 从而 E 包含了一个 R 的极小右理想 V_R. 再由 E 是不可分解内射模可得 $E = E(V_R)$, 从而 E 是 R 的直和项, 所以 E 投射.

(2)⇒(1). 如果每个内射右 R- 模都投射, 则每个右 R- 模都包含在一个自由模中, 特别地, 包含在循环模的直和中, 故 R 为右 Artin 环. 又因为每个右 R- 模包含在 R 的直和中, 从而也包含在 R 的直积中, 所以 R 是右 R- 模范畴的余生成元. 由推论 4.1.1 知 R 为右自内射环, 故 R 为 QF- 环. **证毕**.

推论 4.1.2 对任意环, 以下条件等价:

(1) R 为 QF- 环;

(2) 个右 R- 模可以嵌入自由右 R- 模中;

(3) 每个内射右 R- 模可以嵌入投射模中.

与此推论相关的是, Faith 于 1982 年提出了下面的著名问题, 即

FGF 猜想: 每一有限生成右 R- 模均可以嵌入自由模的环是 QF- 环.

FGF 猜想迄今为止尚未解决. 伴随着 FGF 猜想的研究是下面的猜想.

CF 猜想: 如果每个循环右 R- 模均可以嵌入自由模, 则 R 为右 Artin 环.

不难看出, 如果 CF 猜想成立, 则 FGF 猜想也成立. 因而 CF 猜想的研究显得特别重要. 关于这两个猜想的进展情况, 我们将在第八章进行详细的论述.

§4.2 投射模的内射性

本节的主要目的是证明上节定理 4.1.1 的对偶定理, 即环 R 是 QF- 环当且仅当每个投射右 R- 模内射.

引理 4.2.1 环 R 满足右零化子升链条件当且仅当对 R 的每个右理想 I 存在一个有限生成的子理想 I_1 使得其左零化子 $l(I) = l(I_1)$.

证明 必要性. 设 I 是任意一个右理想, I_1 是有限生成的子理想, 使得 $l(I_1)$ 在

$$\{l(K)\,|K \leqslant R_R\}$$

中是极小左理想 (其中, K 是 I 的所有有限生成子理想). 如果 $x \in I$, 则 $Q = I_1 + xR$ 是 I 的一个有限生成子理想, 有 $l(Q) \subseteq l(I_1)$. 由 I_1 的选取知, $l(Q) = l(I_1)$, 有 $l(I_1)x = 0$, 从而得 $l(I_1)I = 0$, 即 $l(I_1) \subseteq l(I)$. 故 $l(I_1) = l(I)$.

充分性的证明我们留给读者. **证毕**.

引理 4.2.2 如果 R 是右自内射环且满足右零化子升链条件， A, B 都是右理想且 $A \supseteq B$. 则存在有限生成子理想 $A' \supseteq B'$ 使得 $l(A) = l(A'), l(B) = l(B')$.

证明 由于 R 是右自内射环，由定理 1.3.1 知，对任意两个右理想 A,B 有 $l(A\bigcap B) = l(A) + l(B)$. 令 $A \supseteq B$, 则由引理 4.2.1 知，存在 A 的有限生成子理想 A' 使得 $l(A) = l(A')$, 从而 $l(A'\bigcap B) = l(A) + l(B) = l(B)$. 因此，对 $A'\bigcap B$ 运用引理 4.2.1, 存在 $A'\bigcap B$ 的有限生成子理想 B', 使得 $l(B') = l(B)$. **证毕**.

引理 4.2.3 如果 R 是右完全环且 R 满足右零化子升链条件，则 R 必为半准素环.

证明 由于 R 是半局部环，则 R/J 是半单环. 易知 J 是幂零理想. 故 R 是半准素环. **证毕**.

命题 4.2.1 设 R 为任意环， E 为内射右 R- 模. 则以下条件等价:

(1) 任意指标集 A, 直和 $E^{(A)}$ 为内射模;

(2) $E^{(N)}$ 为内射模，其中 N 为自然数集;

(3) R 中右理想的 E - 零化子满足升链条件.

证明 (2)⇒(3). 假设存在 E- 零化子的严格升链

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots,$$

则此序列的左零化子

$$l_E(I_1) \supset l_E(I_2) \supset \cdots$$

是一严格降链. 选定 $x_n \in l_E(I_n)\backslash l_E(I_{n+1})$, 并令

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

则对任意 $a \in I$, 存在 $n > 0$, 使得 $x_{n+k}a = 0$ 对每个 $k > 0$ 成立. 因此，存在下面的 R- 同态 $f : I \to E^{(N)}$ 满足

$$f : a \to (x_1a,\ x_2a, \cdots).$$

因为 $E^{(N)}$ 为内射模，所以存在

$$y = (y_1, \cdots, y_n, 0, \cdots) \in E^{(N)},$$

使得对所有 $a \in I$ 有

$$(x_1a, x_2a, \cdots) = f(a) = ya = (y_1a, \cdots, y_na, 0, \cdots),$$

但这与 $x_{n+1} \notin l_E(I_{n+2})$ 矛盾，所以 R 中右理想的 E- 零化子满足升链条件.

(3)⇒(1). 设 I 为 R 的任意右理想, 并令 $f: I \to E^{(A)}$ 为任意右 R- 模同态. 由引理 4.2.1, 存在有限生成的子理想 $I_1 = r_1R + \cdots r_nR$ 使得其左零化子 $l(I) = l(I_1)$. 因为直积 E^A 内射, 所以存在 $y \in E^A$, 使得 $f(r) = yr$ 对任意 $r \in I$ 成立. 因为 $f(r_i) = yr_i \in E^{(A)}$, $i = 1, \cdots, n$, 所以存在 $y' \in E^{(A)}$ 使得 $y_\alpha r_i = y'_\alpha r_i$ 对任意 $\alpha \in A$ 成立, 其中 y_α 是 $y \in E^A$ 的 α- 分量. 因为 $r_1, \cdots, r_n$ 生成 I_1, 这表明 $yr = y'r$ 对任意 $r \in I_1$ 成立, 因而 $(y_\alpha - y'_\alpha) \in l(I_1) = l(I)$, $\forall \alpha \in A$. 由此可得 $y_\alpha x_i = y'_\alpha x_i$, $\forall \alpha \in A$ 对任意 $x \in I$ 成立. 即对任意 $x \in I$, 存在 $y' \in E^{(A)}$ 使得

$$f(x) = y'x.$$

由 Baer 准则知 $E^{(A)}$ 内射. **证毕.**

定理 4.2.1 对任意环 R, 下列论述等价:

(1) R 是 quasi-Frobenius 环;

(2) 任意投射右 R- 模均为内射模;

(3) R 是右自内射环且满足右零化子升链条件.

证明 (1)⇒(2). 假设 P_R 是任意投射右 R- 模. 则 P_R 是某个自由模 $(R_R)^{(I)}$(其中 I 为某指标集) 的直和项. 因为 R 是 quasi-Frobenius 环, 所以右正则模 R_R 内射并且 R 是 Noether 环, 从而根据著名的 Bass-Papp 定理, 内射模 R_R 的直和 $(R_R)^{(I)}$ 内射. 所以其直和项 P_R 也内射.

(2)⇒(3). 假定任意投射右 R- 模均为内射模, 则特别地右正则模 R_R 内射, 即 R 是右自内射环. 由命题 4.2.1 知结论成立.

(3)⇒(1). 由 R 的内射性知, 每个有限生成左理想是一个左零化子. 于是, R 满足有限生成左理想降链条件, 即 R 是右完全环, 再由引理 4.2.3 知, R 是半准素环. 所以 R 满足有限生成右理想降链条件. 现任取右零化子降链序列

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots,$$

由引理 4.2.1 知, 存在相应的有限生成右理想降链序列

$$I'_1 \supseteq I'_2 \supseteq \cdots \supseteq I'_n \supseteq \cdots,$$

其中, $I'_i \subseteq I_i$ $l(I'_i) = l(I_i)$ $(i = 1, 2, \cdots)$. 因此, 存在整数 n 使得对任意 $m > n$ 有

$$I'_n = I'_m,$$

取左零化子有

$$l(I_n) = l(I_m),$$

从而证明了 R 满足右零化子降链条件. 由于每个有限生成左理想都是左零化子, 从而 R 满足有限生成左理想升链条件. 因此每个左理想有限生成. 由定理 3.2.1 知, R 是 QF- 环. **证毕.**

接下来，我们证明 QF- 环上有限生成投射模的一个扩张性质. 为此我们需要 Bass 关于半局部环的一个定理. 事实上， Bass 的这个定理在代数 K- 理论中是极其重要的. 鉴于此定理在代数 K- 理论中的意义，我们给出两个不同方法的证明.

定理 4.2.2 设 R 为有单位元 1_R 的半局部环， $K \leqslant_R R$ 为 R 的左理想，并任取 $a \in R$. 若 $R \cdot a + K = R$, 则存在 $k \in K$ 使得 $a + k \in R$ 为可逆元.

证明 注意到 $u \in R$ 为可逆元当且仅当 $\overline{u} \in \overline{R} := R/J$ 为可逆元，故不妨假设 R 为半单环. 再利用 Wedderburn-Artin 定理，我们可以进一步假定存在除环 D 以及有限维右 D- 空间 V_D, 使得 $R = End(V_D)$. 则由 $K \leqslant_R R$ 为 R 的左理想可得子空间 $W = ann(K) = \{v \in V | Kv = 0\}$, 进而对维数进行归纳可证

$$K = ann(W) = \{f \in R | f(W) = 0\}.$$

再由 $R \cdot a + K = R$ 可知，存在 $r \in R$ 以及 $k \in K$ 使得 $1_R = ra + k$. 若存在 $w \in W$ 使得 $a(w) = 0$, 则有

$$w = (ra + k)w = k(w) = 0.$$

由此可知同态 $a \in R = End(V_D)$ 在 W 上的限制 $a|_W : W \to aW$ 为同构. 现选取 V_D 的 D- 自同构 $f \in R := End(V_D)$, 使得对任意 $w \in W$ 有 $f(w) = a(w)$, 因而 $f - a \in ann(W) = K$. 故存在 $k \in K$ 使得 $f = a + k \in R$ 为自同构. **证毕.**

Swan 对此给出了另外一种证明方法

证明 同样，注意到 $u \in R$ 为可逆元当且仅当 $\overline{u} \in \overline{R} = R/J$ 为可逆元，故不妨假设 R 为半单环. 因而可选取左理想 K' 使得

$$K = (Ra \cap K) \bigoplus K'.$$

进而可假定 $R = Ra \oplus K$. 现定义同态 $f : R \to Ra$ 为 $a \in R$ 的右乘, 并令 $C := \ker(f)$, 则可得下面的短正合列

$$0 \to C \to R \xrightarrow{f} Ra \to 0.$$

令 $g : R \to C$ 为 $f : R \to Ra$ 的分裂同态，则可得同构

$$(f, g) : R \to Ra \bigoplus C.$$

又因为 $R = Ra \oplus K$, 故由半单性知，存在同构 $\theta : C \to K$. 现考虑下面的合成映射

$$R \xrightarrow{(f,g)} Ra \bigoplus C \xrightarrow{(1,\theta)} Ra \bigoplus K = R.$$

在此合成映射下，任意 $r \in R$ 被映射到 $ra + \theta(g(r))$. 同时注意到此合成映射为左 R- 模同构，故单位元 $1_R \in R$ 被映射到某个可逆元，由此可知

$$a + \theta(g(1_R)) \in a + K$$

为可逆元. **证毕.**

命题 4.2.2 设 R 为 QF- 环, 令 M_R 为有限生成投射模, 并设 A, B 为 M 的任意子模. 则任意 R- 同构 $h: A \to B$ 都能扩张成 M 的 R- 自同构.

证明 因为 M_R 也为内射模, 故 $h: A \to B$ 能扩张成 M_R 的自同态, 为方便起见, 我们同样记为 $h: M \to M$. 现令 $H := End(M_R)$, 则由内射模的性质知 H 为半局部环. 令

$$K := \{k \in H | k(A) = 0\},$$

则 K 为环 H 的左理想. 我们断言 $H = Hh + K$. 为证此断言, 只需证明存在 $f \in Hh$ 以及 $g \in K$ 使得 $1_H = f + g$. 为此令 $C := \ker(h)$, 则有 $A \bigcap C = 0$. 再由 M 的内射性可知存在 $g \in H$, 使得其在 C 上的限制 $g|_C = id_C$, 并且 $g|_A = 0$. 由此可知 $g \in K$, 并且 $f := 1_H - g$ 满足 $f(C) = f(\ker(h)) = 0$, 即 $\ker(h) \subseteq \ker(f)$. 又因为 $H := End(M_R)$, 并且 M_R 为内射模, 故可知 $f \in H \cdot h$.

现 $H = Hh + K$, 再由 Bass 定理可知存在 $k \in K$, 使得 $\overline{h} := h + k \in H$ 为同构. 又因为 $k(A) = 0$, 故在 A 上的限制有 $\overline{h}|_A = h|_A$, **证毕.**

§4.3 quasi-Frobenius 环的一种自然推广: IF- 环

由 Faith-Walker 定理知道环 R 为 QF- 环当且仅当任意内射左 R- 模均投射. 本节中, 我们研究每个内射左模均平坦的环, 它是 QF- 环的一种自然推广.

定义 4.3.1 称环 R 为左 IF- 环, 如果每个内射左 R- 模均为平坦模.

为给出 IF- 环的非平凡刻画, 我们需要一些准备工作.

对任意 R- 模 M_R, 记其特征模为 $M^* := Hom_Z(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

首先我们给出平坦模的 Lasard 刻画. 设 P 与 M 为左 R- 模. 则存在自然同态

$$\sigma = \sigma_{P,M} : Hom_R(P, R) \otimes M \to Hom_R(P, M),$$

对任意 $f \in Hom_R(P, R), m \in M, p \in P$, 其定义为

$$\sigma(f \otimes m)(p) = f(p)m.$$

定理 4.3.1 设 $_RM$ 为左 R- 模, 则以下条件等价:

(1) 模 $_RM$ 为平坦模;

(2) 对任意有限表现模 P, $\sigma = \sigma_{P,M} : Hom_R(P, R) \otimes M \to Hom_R(P, M)$ 为同构;

(3) 对任意有限表现模 P, $\sigma = \sigma_{P,M} : Hom_R(P, R) \otimes M \to Hom_R(P, M)$ 为满同态;

(4) 对任意有限表现模 P 以及 $u \in Hom_R(P, M)$, 存在有限生成自由模 F 以及 $v \in Hom_R(P, F), w \in Hom_R(F, M)$, 使得 $u = wv$.

证明 (1)⇒(2) 和 (2)⇒(3) 是平凡的，(4)⇒(1) 可由文献 [86] 定理 1.2) 得到，故在此只需证明 (3)⇒(4).

设 $u \in Hom_R(P, M)$, $u = \sigma\Big(\sum_{i=1}^{k} f_i \otimes m_i\Big)$, $f_i \in Hom_R(P, R)$, $m_i \in M$. 令 $F = R^k$, 定义： $v : P \to F, v(p) = (f_1(p), \cdots, f_k(p))$, $w \in Hom_R(F, M)$, $w(r_1, \cdots, r_k) = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i$. 那么 F, v, w 满足 (4). **证毕.**

定义 4.3.2 右 R- 模 M_R 称为 T- 有限生成，如果 M_R 包含一个有限生成子模 M_0 使得

$$(M/M_0) \otimes (R_R)^* = 0;$$

右 R- 模 M_R 称为 H- 有限生成，如果 M_0 包含一个有限生成子模 M_0 使得

$$Hom_R(M/M_0, R) = 0.$$

命题 4.3.1 任意 T- 有限生成右 R- 模必为 H- 有限生成模.

证明 设 M_0 为 M_R 包含一个有限生成子模 M_0 使得 $(M/M_0) \otimes (R_R)^* = 0$. 则

$$\begin{aligned} 0 &= Hom_Z(M/M_0 \otimes R^*, Q/Z) \\ &= Hom_R(M/M_0, Hom_Z(R^*, Q/Z)) \\ &= Hom_R(M/M_0, R^{**}). \end{aligned}$$

又因为 $R \subseteq R^{**}$, 所以 $Hom_R(M/M_0, R) = 0$. **证毕.**

定义 4.3.3 右 R- 模 M 称为 H-**有限表现**(T-**有限表现**), 如果存在有限生成自由右 R- 模 F 以及满同态

$$F \xrightarrow{\pi} M \to 0,$$

使得其核 $\ker \pi$ 是 H- 有限生成 (T- 有限生成).

命题 4.3.2 对任意环 R, 以下条件等价：

(1) R 的每个有限生成右理想 T- 有限表现 (H- 有限表现);

(2) 对 R 的每个有限生成右理想 I, $(I : a) = \{r \in R | ar \in I\}$ H- 有限生成 (T- 有限生成);

(3) 对任意 $a \in R$, $r(a)$ H- 有限生成 (T- 有限生成), 并且任意两个有限生成右理想的交 H- 有限生成 (T- 有限生成).

证明 直接修改 Chase 关于凝聚环特征定理的证明可得本命题的证明. **证毕.**

定义 4.3.4 环 R 称为右 H- 凝聚 (T- 凝聚), 如果 R 满足上面命题中的相应条件.

下面给出 T- 凝聚环的 Colby-Rutter 刻画.

命题 4.3.3 若右正则模 R_R 的特征模 $(R)^* = Hom_Z(R_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 为平坦左 R-模，则以下条件等价：

(1) R 为 T- 凝聚环；

(2) 对任意指标集，$({}_RR^*)^I$ 作为左 R- 模平坦.

证明 参见文献 [39]. **证毕**.

设 N 与 M 为右 R- 模. 定义自然同态

$$\tau = \tau_{N,M} : N \otimes_R M^* \to Hom_R(N, M)^*$$

为

$$\tau(n \otimes f)(g) = f(g(n)).$$

命题 4.3.4 设 N_R 是 H- 有限表现右 R- 模. 则自然同态

$$\tau = \tau_{N,M} : N \otimes_R M^* \to Hom_R(N, M)^*$$

为同构. 进而，若 $R^* = Hom_Z(R_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模平坦，则 N_R 为 T- 有限表现模.

证明 由条件知存在有限生成自由模 F, 以及下面的短正合列

$$0 \to K \to F \to N \to 0,$$

并且存在 K 的有限生成子模 K_0, 使得 $Hom_R(K/K_0, R) = 0$. 从而有下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
K_0 \otimes R^* & \xrightarrow{\alpha} & K \otimes R^* & \to & K/K_0 \otimes R^* & \to & 0 \\
\downarrow \tau_{K_0} & & \downarrow \tau_K & & \downarrow \tau_{K/K_0} & & \\
Hom_R(K_0, R)^* & \xrightarrow{\beta} & Hom_R(K, R)^* & \to & Hom_R(K/K_0, R)^* & \to & 0
\end{array}$$

因为 $Hom(K/K_0, R)^* = 0$, β 为满同态且 τ_{K_0} 为满同态，所以 $\tau_K\alpha$ 为满同态，因此 τ_K 也为满同态.

考察下面的交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
K \otimes R^* & \xrightarrow{\alpha} & F \otimes R^* & \to & N \otimes R^* & \to & 0 \\
\downarrow \tau_{K_0} & & \downarrow \tau_K & & \downarrow \tau_{K/K_0} & & \\
Hom_R(K, R)^* & \xrightarrow{\beta} & Hom_R(F, R)^* & \to & Hom_R(N, R)^* & \to & 0
\end{array}$$

因为 τ_F 为同构且 τ_K 为满同态，由第 3 章的几条引理知 τ_N 为同构.

最后，若 $R^* := Hom_Z(R_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模平坦. 则在交换图

$$\begin{array}{ccccccc} K_0 \otimes R^* & \xrightarrow{\alpha} & K \otimes R^* & \rightarrow & K/K_0 \otimes R^* & \rightarrow & 0 \\ \downarrow \tau_{K_0} & & \downarrow \tau_K & & \downarrow \tau_{K/K_0} & & \\ Hom_R(K_0, R)^* & \xrightarrow{\beta} & Hom_R(K, R)^* & \rightarrow & Hom_R(K/K_0, R)^* & \rightarrow & 0 \end{array}$$

中， τ_K 为单同态，因而为同构. 又 α 为满同态，故 $K/K_0 \otimes R^* = 0$, 即证 N_R 为 T- 有限表现模. **证毕.**

命题 4.3.5 设 R 为右 H- 凝聚环. 则 R 为右有限内射环当且仅当 $R^* = Hom_Z(R_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模平坦.

证明 设 I 为 R 的有限生成右理想. 则由上面的命题知，序列

$$0 \rightarrow I \otimes R^* \rightarrow R \otimes R^*$$

正合，当且仅当下面的序列

$$0 \rightarrow Hom_R(I, R)^* \rightarrow Hom_R(R,)^*$$

正合，当且仅当有下面的正合列

$$Hom_R(R, R) \rightarrow Hom_R(I, R) \rightarrow 0.$$

证毕.

下面这个关于单边 IF- 环的著名特征是由 Colby 在 1975 年给出的.

定理 4.3.2 对任意环 R, 下列条件等价:

(1) R 为左 IF- 环;

(2) 每个有限表现左 R- 模 P 的内射包 $E(P)$ 平坦;

(3) 每个有限表现左 R- 模都是一个自由模的子模;

(4) 对每个自由右 R- 模 F, 其特征模 $F^* = Hom_Z(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模平坦;

(5) 右正则模 R_R 的特征模 $R^* = Hom_Z(R_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 为平坦左 R- 模，并且 R 为右 T- 凝聚环;

(6) R 为右 f 内射环，并且 R 为右 H- 凝聚环.

证明 (2)⇒(3). 设 P 为任意有限表现右 R- 模，则其内射包 $E(P)$ 平坦. 由 Lazard 定理知存在有限生成自由模 F, 以及同态 $u \in Hom_R(P, F)$, $v \in Hom_R(F, M)$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{inc} & E(P) \\ u \downarrow & v \swarrow & \\ F & & \end{array}$$

其中 inc 为包含映射，从而 u 为单射．故每个有限表现左 R- 模都是一个自由模的子模．

(3)⇒(4)．设 F 为任意自由右 R- 模，则由 Lambek 准则知特征模 $F^* = Hom_Z(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模内射．令 P 为有限表现作 R- 模，L 为包含 P 的自由左 R- 模．考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} Hom_R(L,R) & \xrightarrow{\sigma_L} & Hom_R(L,F^*) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ Hom_R(P,R)\otimes F^* & \xrightarrow{\sigma_P} & Hom_R(P,F^*) \end{array}$$

因为 F^* 内射，所以 β 为满同态．又因为 L 是有限生成自由模，所以 σ_L 为同构．由此可知 σ_P 为满同态．再由 Lazard 定理知特征模 $F^* = Hom_Z(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模平坦．

(4)⇒ (5)．显然正则模 R_R 的特征模 $(R)^* = Hom_Z(R_R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模平坦．现对任意集合 I, 则由

$$({}_RR^*)^I = Hom_Z(R_R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^I = Hom_Z(R_Z^{(I)},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

知 $({}_RR^*)^I$ 为平坦作 R- 模．再由前面的命题知 R 为右 T- 凝聚环．

(5)⇒(6)．由上面的命题 4.3.1 知命题 4.3.5 得到．

(4)⇒(1)．设 E 为任意内射左 R- 模．则存在自由右 R- 模 F, 以及满同态

$$F \to E^* \to 0,$$

由此可得正合列

$$0 \to E^{**} \to F^*,$$

由 (4) 知 F^* 为平坦模，并且 $E \subseteq E^{**}$, 所以 E 为 F^* 的直和项，故 E 也为平坦模．

(6)⇒ (4)．由命题 4.3.4, 命题 4.3.5 知道 (5) 成立．和 (5) 以及命题 4.3.3 可得 (4) 成立．　**证毕**.

推论 4.3.1　设 R 为左 IF- 环，则 R 为右 f- 内射环，即有

(1) 如果 I_1 与 I_2 为 H- 有限生成右理想，则 $l(I_1 \bigcap I_2) = l(I_1) + l(I_2)$；

(2) 如果 I 为有限生成左理想，则 $l(r(I)) = I$.

证明　(1) 假设 $x \in l(I_1 \bigcap I_2)$, 并定义 $\varphi : I_1 + I_2 \to R_R$ 为 $\varphi(i_1 + i_2) = i_1x$. 由 R_R 是 f- 自内射和 (1), 存在 $J_1 + J_2$ 的子模 K 和 $y \in R$, 对任意的 $a \in K$ 满足 $\varphi(a) = ya$. 因为 $Hom\ ((J_1 + J_2)/K, R) = 0$, 所以对任意的 $j \in J_1 + J_2$ 有 $\varphi(j) = yj$. 因此

$$x = (x - y) + y \in l(J_1) + l(J_2).$$

(2) 设 $I = Rx_1 + \cdots + Rx_n$. 若 $n = 1$, 由 R_R 的 f- 内射可知. 由归纳假设，命题 4.3.2 和文献 [36](Proposition 1), 我们有下面的等式

$$
\begin{aligned}
&l(r((Rx_1 + \cdots + Rx_{n-1}) + Rx_n)) = l(r(Rx_1 + \cdots + Rx_{n-1}) + r(Rx_n)) \\
&= l(r(Rx_1 + \cdots + Rx_{n-1})) + L(r(Rx_n)) = I,
\end{aligned}
$$

此时 (1) 成立，由文献 [72] 中的结论可知 R 是 f- 自内射环. **证毕.**

推论 4.3.2 设 R 为左 IF- 环，则 R 为右 FP- 内射环.

证明 由上述定理 4.3.2 知道, 任意有限表现的左 R- 模是一个自由模的子模. 而右 FP- 环的特征是任意表现的左 R- 模是无挠的.

定理 4.3.3 对任意环 R, 以下条件等价：

(1) 环 R 为双边 IF- 环；

(2) R 为凝聚环，并且 R 为双边有限内射环；

(3) R 为凝聚环，存在一个环 S, R 为 S 的有单位元的子环使得 $_RS$ 和 S_R 都是忠实平坦内射 R- 模.

证明 (1)⇒(2). 设 I 为环 R 的有限生成左理想. 由假定知 R 为 H- 凝聚环，故存在有限生成自由模 F, 以及下面的短正合列

$$0 \to K \to F \to I \to 0,$$

并且存在 K 的有限生成子模 K_0 使得 $Hom(K/K_0, R) = 0$. 因为 F/K_0 有限表现，由上面定理知 F/K_0 可嵌入以某自由模 G. 再由 $Hom(K/K_0, R) = 0$ 知 $K/K_0 = 0$, 故 (2) 成立.

(2)⇒(1). 由上面定理知.

(1)⇒(3). 定义

$$S = Hom_R(R^*_R, R^*_R).$$

则 R^* 的左 R- 模结构诱导出 S 的双 R- 模结构. 又因为 R^*_R 是忠实的，所以如下定义的同态 $\beta : R \to S, \beta(r)(\varphi) = r\varphi, \quad \forall r \in R,\ \varphi \in R^*$ 是有单位元的环的单同态. 进而易知 β 为双模同态. 因为 R^*_R 内射并且 $_RR^*$ 平坦，我们直接可知 S_R 内射. 又因为 $(R^* \otimes_R R)_R$ 平坦，故由伴随同构定理得

$$_RS =_R Hom_R(R^*_R, R^*_R) \cong_R (Hom_Z((R^* \otimes_R R)_R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

所以 $_RS$ 内射. 因为 R 为双边 IF- 环，所以 S_R 与 $_RS$ 都既内射又平坦.

现假定存在左 R- 模 M 使得 $S \otimes_R M = 0$. 则下图交换

$$
\begin{array}{ccc}
R \otimes E(M) & \xrightarrow{\gamma} & S \otimes E(M) \\
\uparrow \alpha & & \uparrow \\
R \otimes M & \to & S \otimes M
\end{array}
$$

因为 $E(M)$ 平坦，且 R 平坦，故 α 与 γ 都为单同态．再由 $S\otimes_R M=0$，可知 $R\otimes M=M=0$．因此 S_R 忠实平坦．同理，${}_RS$ 忠实平坦．

(3)⇒(1)．设 I 环 R 的有限生成左理想．则下面的图交换

$$\begin{array}{ccccc} Hom(R,S) & \rightarrow & Hom(I,S) & \rightarrow & 0 \\ \uparrow \sigma_R & & \uparrow \sigma_I & & \\ Hom(R,R)\otimes S & \xrightarrow{\alpha} & Hom(I,R)\otimes S & \rightarrow & 0 \end{array}$$

因为 I 有限表现，所以由 Lazard 定理知 σ_R 与 σ_I 都为同构．因此 α 为满同态．又因为 ${}_RS$ 忠实平坦，故序列

$$Hom(R,R)\rightarrow Hom(I,R)\rightarrow 0$$

正合，故 R_R 有限内射．同理可知 ${}_RR$ 有限内射，故由上面定理 4.3.2 知 R 为双边 IF- 环．　　**证毕**.

下面的定理总结了许多作者的工作，包括了 [36], [122], [77], [92], [159] 等文献中的结论．我们省去其证明．

定理 4.3.4　对任意环 R, 以下条件等价：

(1) R 为双边 IF- 环；

(2) 取零化子函子诱导了环 R 的有限生成单边理想之间的对偶；

(3) 每个有限生成单边理想都是一个零化子，并且每个有限生成单边理想的零化子都有限生成．

最后我们考察一下环 IF 性在群环上的表现．

定理 4.3.5　设 R 为任意环且 G 为群．则群环 $R(G)$ 为左 IF- 环当且仅当 R 为左 IF- 环并且 G 为局部有限群．

证明　必要性．设 P 为有限表现左 R- 模．则 $R(G)\otimes_R P$ 为有限表现左 $R(G)$-模．因此 $R(G)\otimes_R P$ 可以嵌入某自由 $R(G)$- 模 $R(G)^n$．令 $\beta: P\rightarrow R(G)\otimes_R P$ 为典范同态 $\beta(p)=e_G\otimes p$, 则易知合成映射

$$P\xrightarrow{\beta}R(G)\otimes_R P\xrightarrow{inc}R(G)^n$$

为单 R- 同态．因此 R 为左 IF- 环．下证 G 为局部有限群．为此设 H 为 G 的任意有限生成无限子群．则易知 $R(G)$ 包含了一个有限生成左理想 I 其右零化子 $r(I)=0$．再由 $R(G)$ 为左有限内射环知

$$I=l(r(I))=l(0)=R(G).$$

矛盾，故 G 为局部有限群．

充分性. 首先假定 G 为有限群. 令 I 为任意指标集. 因为 $R(G)_R$ 有限表现, 故

$$(R(G) \otimes_R R^*)^I \cong R(G) \otimes (R^*)^I.$$

又因为 ${}_R(R^*)^I$ 平坦, 所以 ${}_{R(G)}(R(G) \otimes_R R^*)^I$ 平坦. 再由伴随同构定理有

$$R(G) \otimes_R R^* \cong Hom_R(R(G), R)^* \cong Hom_{R(G)}(R(G), R(G))^* \cong R(G)^*.$$

因此 ${}_{R(G)}(R(G)^*)^I = (R(G)^{(I)})^*$ 也为平坦模. 故 $R(G)$ 为左 IF- 环.

下设 G 为任意局部有限群, 并令 P 为任意有限表现左 $R(G)$- 模. 则存在满同态

$$\pi : R(G)^n \to P,$$

其核 $K := \ker \pi$ 有限生成. 令 X 为 K 的生成元所组成的有限集. 因为 G 为局部有限群, 所以存在有限子群 $H < G$, 使得 $R(H)X \subseteq R(H)^n \subseteq R(G)^n$. 由此可得下面的 $R(H)$- 模的正合列

$$0 \to R(H)X \to R(H)^n \xrightarrow{\pi|} R(H)Y \to 0,$$

其中 Y 为 ${}_{R(G)}P$ 的生成元所成的有限集. 因为 $R(H)$ 为左 IF- 环, 所以存在自然数 m 及单同态 $\alpha \in Hom_{R(H)}(R(H)Y, R(H)^m)$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} R(G) \otimes_{R(H)} R(H)Y & \xrightarrow{1\otimes\alpha} & R(G) \otimes_{R(H)} R(H)^m \\ \downarrow \gamma & & \downarrow\cong \\ P & \xrightarrow{\beta} & R(G)^m, \end{array}$$

其中 $1 \otimes \alpha$ 为单同态， λ 为满同态. 因此 β 为单同态, 故 $R(G)$ 为左 IF- 环.

证毕.

最后, 值得指出的是, 我的一个研究生李珊珊将平坦模的概念进行了推广, 引入了所谓 p- 平坦模. 如果考虑每个内射模均为 p- 平坦的环类, 那也是能够得到一些很有趣的结果的. 另外, 我们在后面的第 6 章对内射性也做了各种各样的推广, 结合本章 IF- 环的思路, 还可以做更多的讨论.

第 5 章　quasi-Frobenius 环与限制链条件

1966 年，C. Faith 在文献 [46] 中证明了一个左 (右) 自内射环是 QF- 环, 只要它对左零化子满足升链条件. 1980 年，E.P.Armendariz 研究了一类对本质理想满足降链条件的环. 他证明了，环 R 对本质左理想满足降链条件等价于环 R/S_l 是左 Artin 环. 利用这个事实, 他证明了对本质左 (右) 理想满足降链条件的左自内射环是 QF-环.

1989 年， Huynh, Dung 和 Wisbauer 研究了一类对本质理想满足升链条件的环. 他们证明了环 R 对本质左理想满足升链条件等价于环 R/S_l 是左 Noether 环，这是与 Armendariz 结论相平行的一个结果. 利用这个事实，他们证明了对本质左理想满足升链条件的左自内射环也是 QF- 环, 因此他们发展了 Armendariz 的主要结果 [6].

在 1992 年， Armendariz 和 Park 受这种在自内射环上加限制条件及 Faith 在文献 [46] 中结果的启发，考虑了 R/S_l 对左零化子满足升链条件的左自内射环 R. 他们首先证明了满足这种条件的左自内射环是一个半准素的左 PF- 环. 利用这个事实，他们证明了若 R 是一个自内射环且 $R/S_l(R/S_r)$ 是左 Golide 环，则 R 是 QF- 环. 这推广了文献 [6] 和 [68] 的结果.

§5.1　QF- 环与零化子理想满足升链条件

在 1966 年， C. Faith 在文献 [46] 中证明了一个左 (右) 自内射环是 QF- 环，只要它对左零化子满足升链条件. 因此，在自内射环中，对左理想一种限制形式的升链 (或降链) 条件可以推出它满足极大 (极小) 条件. 下面这个定理是 C. Faith 在 1966 年给出的.

定理 5.1.1　下列关于 R 的条件等价:

(1) R 是 QF- 环;

(2) R 是右自内射环且满足右零化子升链条件;

(3) R 是右自内射环且满足左零化子升链条件;

(4) R 是右 Noether 环，每个左理想都是零化子且对每对右理想 I_1, I_2 有

$$l(I_1 \bigcap I_2) = l(I_1) + l(I_2).$$

证明　(2) ⇒ (1). 由 R_R 的内射性知每个有限生成左理想是一个左零化子，于是，R 满足有限生成左理想降链条件. 于是，R 是右完全环，由引理 4.2.3 知，R 是半

准素环. 于是, R 满足有限生成右理想降链条件. 设 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ 是任意右零化子降链序列, 由引理 4.2.2 知, 存在相应有限生成右理想序列 $A'_1 \supseteq A'_2 \supseteq \cdots \supseteq A'_n \supseteq \cdots$ 使得

$$l(A'_i) = l(A_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots),$$

因此, 存在整数 n 使得对任意 $m > n$, 有 $A'_n = A'_m$, 于是有 $l(A_n) = l(A_m)$, 从而证明了 R 满足右 (左) 零化子降链条件 (升链条件). 由于每个有限生成左理想都是左零化子, 从而 R 满足有限生成左理想升链条件. 因此每个左理想有限生成. 由定理 3.2.1 知, R 是 QF- 环.

(3) $\Rightarrow$ (1). 由于 R 是右自内射环, 有每个有限生成左理想是零化子, 故 R 满足有限生成左理想升链条件, 即 R 是左 Noether 环. 由定理 3.2.1 知, R 是 QF-环.

(4) $\Rightarrow$ (1). 由于 R 是右 f- 内射当且仅当 $lr(Ra) = Ra$ 并且对任意有限生成右理想 I_1 、 I_2, 有 $l(I_1 \bigcap I_2) = l(I_1) + l(I_2)$. 由假设知 R 是右 f- 内射, 又因为 R 是右 Noether 环, 对 R 的任意右理想 I_R 是有限生成. 故 R 是右自 – 内射, 由定理 3.2.1 知, R 是 QF- 环.

(1) $\Rightarrow$(4). (3), (4), (2), 显然成立. **证毕**.

命题 5.1.1 若 R 满足右零化子升链条件, 则 R 满足左零化子降链条件.

证明 设 $L_1 \supseteq L_2 \supseteq \cdots \supseteq L_n \supseteq \cdots$ 是 R 的任一左零化子降链, 从而得右零化子升链:

$$r(L_1) \subseteq r(L_2) \subseteq \cdots \subseteq r(L_n) \subseteq \cdots$$

由于 R 满足右零化子升链条件, 于是存在 n, 使得对任意 $m \geqslant n$, 有 $r(L_n) = r(L_m)$, 于是有 $lr(L_n) = lr(L_m)$, 故有 $L_n = L_m$. 即证 R 满足左零化子降链条件. **证毕**.

命题 5.1.2 R 是右自内射环且 R 满足右零化子降链条件, 则 R 是 QF- 环.

证明 由于 R 是右自内射环, 于是 R 的每个有限生成左理想都是左零化子. 要证 R 是左 Noether 环, 只须证 R 对有限生成左理想满足升链条件即可. 设

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

是有限生成左理想升链, 从而可得右零化子降链:

$$r(I_1) \supseteq r(I_2) \supseteq \cdots \supseteq r(I_n) \supseteq \cdots.$$

由条件知存在 n 使得对任意 $m \geqslant n$ 有 $r(I_n) = r(I_m)$, 从而有 $lr(I_n) = lr(I_m)$. 由于 R 是右自 – 内射环, 有 $lr(I_n) = I_n$, $lr(I_m) = I_m$. 故 R 是左 Noether 环. 由定理 3.2.1 知 R 是 QF- 环. **证毕**.

定理 5.1.2 R 是右自内射环且 R 满足左零化子降链条件, 则 R 是 QF- 环.

证明 我们分步骤来证明. (1) 由于 R 是右自内射环，于是有限生成左理想是左零化子. 又由于 R 满足左零化子降链条件. 故 R 对有限生成左理想满足降链条件，从而 R 是右完全环.

(2) 现证 R 满足右零化子升链条件.

对任意右零化子升链：$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \cdots$ (A_i 是右零化子), 从而得左零化子降链：$l(A_1) \supseteq l(A_2) \supseteq \cdots l(A_n) \supseteq \cdots$. 由于 R 满足左零化子降链条件，于是存在 n 使得任意 $m \geqslant n, l(A_n) = l(A_m)$, 从而有 $rl(A_n) = rl(A_m)$. 由于 A_n, A_m 是右零化子，有 $rl(A_n) = A_n$, $rl(A_m) = A_m$. 故 R 满足右零化子升链条件.

(3) 由 (1) 知 R 是右完全环. 由引理 4.2.3 有 R 是半准素环，从而 R 是左完全环. 即有 R 对有限生成右理想满足降链条件.

(4) R 是右自 - 内射环及 (2) 知引理 4.2.2 成立.

(5) 证 R 满足右零化子降链条件.

设 $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$ 是任一右零化子降链 (A_i 是右零化子). 由 (4) 及引理 4.2.2 知分别存在 A_i 的有限生成右理想 A_i', 使得有降链

$$A_1' \supseteq A_2' \supseteq \cdots \supseteq A_n' \supseteq \cdots \text{ 且 } l(A_i') = l(A_i)$$

由 (3) 知 R 对有限生成右理想满足降链条件，于是存在 k 使得对任意 $i \geqslant k$ 有 $A_k' = A_i'$. 从而有 $l(A_k') = l(A_i')$, 于是 $l(A_k) = l(A_i)$, 故 $rl(A_k) = rl(A_i)$, 从而 $A_k = A_i$. 即证明了 R 满足右零化子降链条件.

(6) 设 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ 是任有限生成左理想升链, 于是得右零化子降链:

$$r(I_1) \supseteq r(I_2) \supseteq \cdots \supseteq r(I_n) \supseteq \cdots,$$

由 (5) 知存在 k 使得对任意 $i \geqslant k$ 有 $r(I_k) = r(I_i)$, 从而 $lr(I_k) = lr(I_i)$ 即有 $I_k = I_i$. 故 R 对有限生成左理想满足升链条件. 即证 R 是左 Noether 环. 由定理 3.2.1 知 R 是 QF- 环. **证毕.**

推论 5.1.1 R 是右自内射环. 则下列条件等价:

(1) R 满足右零化子升链条件;

(2) R 满足右零化子降链条件;

(3) R 满足左零化子降链条件;

(4) R 满足左零化子升链条件.

§5.2 QF- 环与本质左理想满足降链条件

C. Faith 的一个著名结果是一个满足零化子理想升链条件的左 (右) 自内射环是 QF- 环. 于是，在自内射性环中，某些限制形式的极大条件有可能等价于极大

条件. 某些限制形式的极小条件也有可能等价于极小条件. E. P. Armendariz 在文献 [6] 中考虑的条件是本质单边理想满足极小条件, 从形式上显然比 Aritin 条件要弱; Huynh, Dung 和 Wisbaner 在 [68] 中考虑的是本质左理想满足极大条件; Armendariz 和 Park 在文献 [4] 中考虑的是 R/S_l 和 R/S_r 是左 Goldie 环.

定义 5.2.1 模 M 是 *min-E* 模, 如果 M 满足本质子模降链条件, 而 R 是一个 (左)*min-E* 环, 如果 $_RR$ 是左 *min-E* 模.

首先, 我们给出 *min-E* 模的一个刻画, 这个刻画后面将经常用.

引理 5.2.1 R- 模 M 是 *min-E* 模当且仅当 $M/\mathrm{s}(M)$ 是 Artin 环.

证明 由于 $\mathrm{s}(M)$ 是 M 的所有本质子模的交, 因此如果 $M/\mathrm{s}(M)$ 是 Artin 模, 则 M 满足本质子模降链条件. 另一方面, 假设 M 是 *min-E* 模, 由于本质子模的有限交仍是本质子模, 则 $\mathrm{s}(M)$ 是有限个本质子模的交, 从而 $\mathrm{s}(M)$ 是 M 的本质子模. 于是, 任何包含 $\mathrm{s}(M)$ 的子模都是 M 的本质子模, 故 $M/\mathrm{s}(M)$ 是 Artin 模. **证毕.**

用这个刻画, 我们可以推出 *min-E* 模的一些性质.

推论 5.2.1 设 N 是 R- 模 M 的子模.

(1) 如果 M 是 *min-E* 模, 则 N 和 M/N 都是 *min-E* 模;

(2) 如果 N 是 *min-E* 模且 M/N 是 *min-E* 模, 则 M 是 *min-E* 模;

(3) *min-E* 模的有限直和是 *min-E* 模.

证明 我们只证 (1) 的第二部分, 即若是 *min-E* 模, 证 M/N 是 *min-E* 模.

令 $V=\mathrm{s}(M)+N$, U 是 M 的子模使得 $U/N=\mathrm{s}(M/N)$. 于是有 $V/N\subseteq U/N$, 从而 $V\subseteq U$. 故 $M/U\cong(M/V)/(U/V)$. 由于 $M/V\cong(M/s(M))/(V/s(M))$. 又因为 M 是 *min-E* 模从而 $M/\mathrm{s}(M)$ 是 Artin 模, 从而 M/V 是 Artin 模. 于是 M/U 是 Artin 模. 又因为 $M/U\cong(M/N)/(U/N)$, 从而 M/N 是 *min-E* 模.

同理可证 (1) 的第一部分, (2) 和 (3). **证毕.**

引理 5.2.2 设 R 是 *min-E* 环, 则 $Z(R)\subseteq J(R)$ 且 $J(R)$ 是幂零理想.

证明 设 $x\in z(R)$, 则 $l(x)$ 是 R 的本质子模且 $S(R)\subseteq l(x)\subseteq l(x^2)\subseteq\cdots$, 由于 $R/\mathrm{s}(R)$ 是 Artin 环. 从而 $R/\mathrm{s}(R)$ 是 Noether 环, 存在整数 $k\geqslant 1$ 使得 $l(x^k)=l(x^{k+j})(j\geqslant 1)$. 如果 $ax^k\in Rx^k\bigcap l(x^k)$, 则有 $ax^{2k}=0$, 故 $ax^k=0$. 于是 $Rx^k\bigcap l(x^k)=0$, 由于 $l(x^k)$ 是本质子模, 故 $Rx^k=0$, 从而 $x^k=0$, 因此, $Z(R)$ 是一个主诣零理想. 于是 $Z(R)\subseteq J(R)$. 由于 $(J(R)+\mathrm{s}(R))/\mathrm{s}(R)\subseteq J(R/\mathrm{s}(R))$, 又因为 $R/\mathrm{s}(R)$ 是 Artin 环, 故 $(J(R)+\mathrm{s}(R))/\mathrm{s}(R)$ 是幂零的, 故存在整数 $t\geqslant 1$ 是使得 $(J(R))^t\subseteq\mathrm{s}(R)$. 又由于 $J(R)$ 零化所有单 R- 模. 因此 $(J(R))^{t+1}=0$.

证毕.

引理 5.2.3 设 $\{R_i\,|\,i=1,2,3,\cdots\}$ 是一族环, $R=\prod\limits_{i=1}^{\infty}R_i$, $S=\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}R_i$, 则

R/S 无极小左理想.

证明　令 $R' = R/S$ 且 $x + \mathrm{s} \in R'$(其中 $x = (x_i) \notin S$), 令 $L = \{i \mid x_i \neq 0\} = \{i_1, i_2, \cdots\}$. 由于 $x \notin S$, 则 L 是 N 的一个余无限子集. 令 $L_0 = \{i_2,\ i_4,\ \cdots\}$, 令 $r = (r_i)$, 如果 $i \notin L_0$, 则 $r_i = 0$. 如果 $i \notin L_0$, 则 $r_i = x_i$. 显然 $r \in R$. 由于 L_0 也是 N 的一个余无限子集, 故 $r \notin \mathrm{s}$. 存在 $w \in R$ 使得 $r = wx$, 故 $R'(r+\mathrm{s}) \subseteq R'(x+\mathrm{s})$, 由于任意 $y \in R$, $yr - x \notin S$. 故 $R'(r+\mathrm{s}) \neq R'(x+\mathrm{s})$. 　**证毕.**

由引理 5.2.3 有下面引理.

引理 5.2.4　设 $\{R_i \mid i \in I\}$ 是一族 *min-E* 环. 则 $R = \prod\limits_{i=1}^{\infty} R_i$ 是 *min-E* 环, 当且仅当 I 是有限集.

证明　对每个 $i \in I$, 令 $E_i = S(R_i)$. 如果 I 是有限集, 则 $\prod\limits_{i=I}^{\infty} E_i = E$ 且 $R/E \cong \prod\limits_{i\in I}(R_i/E_i)$. 于是有 R/E 是 *min-E* 环, 故 R 是 *min-E* 环. 另一方面, 假设 R 是 *min-E* 环, 如果 I 是无限集, 由于 *min-E* 环的直和项都是 *min-E* 环, 不妨假设 $I = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$. 于是有 $\sum_{i\in I} E_i \subseteq E$. 又因为每个 E_i 都是 R_i 的本质子模, 有 $\sum_{i\in I} E_i$ 是 R 的本质子模. 因此一定有 $E = \sum_{i\in I} E_i \subseteq \sum_{i\in I} R_i$, 从而有 $R/\sum_{i\in I} R_i$ 是左 Artin 环, 因此 $R/\sum_{i\in I} R_i$ 有极小左理想与引理 5.2.1 矛盾. 故 I 是有限集. 　**证毕.**

引理 5.2.5　设 R 是 Von.Neumann 正则环和 *min- E* 环. 如果 R 是左 (右) 自内射环, 则 R 是半单 Artin 环.

证明　由于 R 是半素环, $E = Soc({}_RR) = Soc(R_R)$, 而且 E 是一个本质左理想也是一个本质右理想. 如果 R 是右 (左) 自内射环, 则 R 是完全线性环的直积, $R = \prod_{i\in I} R_i$, 由引理 5.2.4 知, I 是有限集且每个 R_i 都是完全线性环且是 *min-E* 环. 不妨假设 $I = \{1\}$ 和 $\mathrm{End}_D(p)$(其中 V 是除环 D 上的左 (右) 向量空间). 如果 V 是 D 上的无限维向量空间, 则 R/E 不是 Artin 环. 于是 V 是 D 上的有限维向量空间, 因此 R 是单 Artin 环. 　**证毕.**

定理 5.2.1　下列条件等价:

(1) R 是 QF- 环;

(2) R 是左自内射环或右 - 内射环且 R 满足本质左理想降链条件.

证明　首先假设 R 是左自内射环. 由第 2 章知, $J = Z(R)$, R/J 是正则环且是左自内射环. 由引理 5.2.5 知, R/J 是半单 Artin 环, 由引理 5.2.2 知, J 是幂零理想. 我们将证明 R- 是右 Artin 环. 从而是 QF- 环. 因为若 J 是有限生成右 R- 模就可以保证 R 有正合列, 故只须证明 J 是有限生成右 R- 模即可. 由于 $J = Z(R)$, 任意 $x \in J$, 有 $l(x)$ 是本质子模, 由于 R 是 *min-E* 环, 存在 $x_1, x_2, \cdots, x_k \in J$ 使得 $l(x) = U_{i=1}^{k} l(x_i)$. 令 $A = x_1R + x_2R + \cdots + x_kR$ 有 $A \subseteq J$ 且 $l(A) = l(J)$. 又由于 R 是左自内射环, 有每个有限生成右理想都是右零化子, 故 $A = r(l(A)) = r(l(J)) \supseteq J$,

故 $J = A$ 是有限生成的.

假设 R 是右自内射环. 同理可知, R/J 是半单 Artin 环且 J 是幂零理想. 于是 R 是右 PF- 环. 则 $J = r(E)$. 在 R/J 中, 有 $r(E)/J = (\bigcap_{x\in E} r(x))/J$. 由于 R/J 是右 Artin 环, 存在 x_1, x_2, $\cdots x_k \in E$ 使得 $J = \bigcap_{i=1}^{k} r(x_i)$. 令 $A = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_k$, 有 $A \subseteq E$ 和 $J = r(A)$. 由于 R 是右自内射环, 有 A 是一个左零化子. 故 $A = l(r(A)) = l(J)$. 又因为 $E \subseteq l(J) = A$. 故 $E = A$ 是有限生成左理想. 由于 E 和 R/E 都是 Artin 环, 故 R 是左 Artin 环. **证毕**.

§5.3 QF- 环与本质理想满足升链条件

引理 5.3.1 设 M 是一个有限生成 quasi- 内射左 R- 模. 假设 M 包含一个非零子模的无限直和 $H = \bigoplus_{i\in I} H_i$. 则 M/H 有无限 Goldie 维数.

证明 假设 M/H 有有限 Goldie 维数 k, 由于指标集 I 是无限集, 存在无限子集 $I_1, I_2, \cdots, I_{k+1}$ 使得 $I_i \bigcap I_j = 0 (i \neq j)$ 且 $I = I_1 \bigcup I_2 \bigcup \cdots \bigcup I_{k+1}$. 令 $S_j = \bigoplus_{I_j} H_\mu (j = 1, 2, \cdots, k+1)$ 有 $H = S_1 \bigoplus S_2 \bigoplus \cdots \bigoplus S_{k+1}$. 用 $E(S_i)$ 表示 S_i 的 M-内射包络, 于是有 $E(H) = E(S_1) \bigoplus E(S_2) \bigoplus \cdots \bigoplus E(S_{k+1}) \subseteq M$. 由于 M 是有限生成的, 对每个 j, 有 $E(S_j) \neq S_j$. 由于 $E(H)/H \cong E(S_1)/S_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E(S_{k+1})/S_{k+1}$ 是 M/H 的子模, 于是, M/H 的 Goldie 维数至少是 $k+1$ 与假设矛盾, 故 M/H 的 Goldie 维数是 ∞. **证毕**.

引理 5.3.2 对左 R- 模 M, 下列条件等价:

(1) M 满足本质子模升链条件;

(2) $M/Soc(M)$ 是 Nother 模;

证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 显然成立.

(1) $\Rightarrow$ (2). 假设 M 满足本质子模升链条件. 故 M 的每个 (uniform) 子模是 Noether 模. 设 $A \subseteq B$ 都是 M 的子模且 A 是 B 的本质子模. 存在 M 的一个子模 L 使得 $L \bigcap A = 0$ 且 $A \bigoplus L$ 是 M 的本质子模. 故 $M/(A \bigoplus L)$ 是 Noether 模. 又因为 $B/A \cong (B \bigoplus L)/A \bigoplus L$, 从而有 B/A 是 Noether 模.

设 H 是 M 的一个子模使得 H 是满足条件 $H \bigcap Soc(M) = 0$ 的极大子模. 则 $H \bigoplus Soc(M)$ 是 M 的本质子模且 $M/H \bigoplus Soc(M)$ 是 Noether 模. 故要证明 $M/Soc(M)$ 是 Nother 模, 由正合列: $0 \to H/Soc(M) \to M/Soc(M) \to M/H \bigoplus Soc(M) \to 0$ 知, 只须证明 H 是 Noether 模即可. 首先证明 H 的 Goldie 维数是有限的. 假设 H 包含了一个无限直和 $X = X_1 \bigoplus X_2 \bigoplus \cdots$, 由于 $Soc(X_i) = X_i' \bigcap Soc(M) = 0$, 故每个 X_i 都包含一个非平凡本质子模 Y_i, 从而 $Y = Y_1 \bigoplus Y_2 \bigoplus \cdots$ 是 X 的本质子模. 由上面的证明知, X/Y 是 Noether 模. 又因为 $X/Y \cong X_1/Y_1 \bigoplus X_2/Y_2 \bigoplus \cdots (X_i/Y_i \neq 0)$ 与 X/Y 是 Noether 模 (矛盾). 故 H 的 Goldie 维数有限. 不妨设为 k,

于是 H 包含 k 个相互独立的 (uniform) 子模 U_i 使得 $U = U_1 \bigoplus U_2 \bigoplus \cdots \bigoplus U_k$ 是 H 的本质子模，由上面的证明知 U 是 Noether 模且 H/U 也是 Noether 模．故 H 是 Noether 模．　**证毕**.

引理 5.3.3　设 M 是一个 quasi- 内射的有限生成左 R- 模.

(1) 如果 M 满足本质子模升链条件，则 M 是 Noether 模;

(2) 如果 M 满足本质子模降链条件，则 M 是 Artin 模.

证明　假设 M 满足本质子模升链 (降链) 条件, 则 $M/Soc(M)$ 是 Noether(Artin) 模，所以 $Soc(M)$ 一定是有限生成的．又因为 $Soc(M)$ 是半单模，从而 $Soc(M)$ 既是 Artin 模又是 Noether 模．故 M 是 Noether(Artin) 模．　**证毕**.

定理 5.3.1　下列叙述等价:

(1) R 是 QF- 环;

(2) R 是左自内射环且 R 满足本质左理想升链条件;

(3) R 是左自内射环且 R 满足本质右理想升链条件.

证明　(2) $\Rightarrow$ (1). 由定理 5.2.1 知，R 是左 Noether 环，故 R 是 QF- 环.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 $S_r = Soc(R_R)$, $J = J(R)$, 显然有 $R' = R/J$ 是 Von.Neumann 正则环且 R' 是左自内射环．由于 R 满足本质左理想升链条件，从而 R' 也满足本质右理想升链条件．设 $S'_r = (R'_{R'})$, 则 R'/S'_r 是 Von.Neumann 正则环，由引理 5.3.2 知，R'/S'_r 是右 Noether 环，故 R'/S'_r 是半单 Artin 环．另一方面，由于 R' 是半素环，有 $S'_r = S'_l = Soc({}_{R'}R')$. 由引理 5.3.1 知，左 R- 模 S'_l 的长度有限，从而 R' 是半单 Artin 环.

设 $R^* = R/S_r$, 由引理 5.3.2 知，R^* 是右 Noether 环．对每个 $J^i (i = 1, 2, \cdots)$ 存在有限生成右理想 $U_i \subseteq J^i$ 使得 $J^i + S_r = U_i + S_r$. 用 J 右乘得

$$U_{i+1} \subseteq J^{i+1} = U_i J \subseteq U_i, \quad J^{i+2} = U_{i+1} J \subseteq U_{i+1}.$$

故对任意 $i = 1, 2, \cdots$, 有

$$J^i \supseteq U_i \supseteq U_{i+1} \supseteq J^{i+2},$$

从而有

$$l(J^i) \subseteq l(U_i) \subseteq l(U_{i+1}) \subseteq l(J^{i0+2}).$$

由于

$$J \supseteq J^2 \supseteq \cdots,$$

取零化子可得

$$l(J) \subseteq l(J^2) \subseteq \cdots.$$

又因为 $S \subseteq l(J)$ 且 R/S_r 是右 Noether 环，存在正整数 k 使得

$$l(J^k) = l(J^{k+1}) = \cdots,$$

从而有

$$l(U_k) = l(U_{k+1}) = \cdots.$$

由于 R 是左自内射环，每个 U_i 都是 R 的有限生成右理想. 对任意 i 有 $U_i = rl(U_i)$. 特别地,

$$U_k = r(U_k) = r(U_{k+1}) = U_{k+1} = \cdots,$$

因此

$$J^k + S_r = J^{k+1} + S_r = \cdots,$$

用 $\overline{J}$ 表示 J 在 $\overline{R} = R/S_r$ 中的像，于是有

$$\overline{J}^k = \overline{J}^{k+1} = \cdots.$$

又 $\overline{J} \subseteq Rad\overline{R}$, 故由 Nakayama 引理知 $\overline{J}^k = \overline{0}$. 因为 $\overline{R}/\overline{J} \cong R/(S+J)$ 是半单 Artin 环，又因为 $\overline{R}$ 是右 Noether 环，从而有 $\overline{R}$ 是右 Artin 环，从而 R 满足本质右理想升链条件. 故由定理 5.3.1 知 R 是 QF- 环. **证毕.**

§5.4 QF- 环与 R/S_l 的左零化子满足升链条件

定义 5.4.1 环 R 称为 **正交有限环**, 如果 R 中没有正交幂等元无限集.

引理 5.4.1 设 R 是左自内射环且 R/S_l 是正交有限环，则 S_l 是有限生成左 R- 模.

证明 由引理 5.3.1 知.

引理 5.4.2 如果 R 是左自内射环且 R/S_l 满足左零化子升链条件或者右零化子降链条件，则 R 是半局部环.

证明 R/S_l 满足任一种升链条件都有 R/S_l 是正交有限环. 故由引理 5.4.1 知 S_l 有有限长度. 特别地，S_l 不含无限多个相互正交的幂等元. 由 Utumi 的结果知, R/J 是左自内射环且 R/J 的每族正交的幂等元都能提升为 R 的一族正交幂等元. 如果 R/J 不是半单的，则 R/J 一定包含无限多个相互正交的幂等元提升为 R 中一个无限族正交幂等元 $\{e_i\}$, 于是 $\{e_i + S_l\}$ 是 R/S_l 中的一族正交幂等元使得除有限个外，$e_i \in S_l$. 由于 S_l 是正交有限的，矛盾. 故 R/J 是半单的，即证 R 是半局部环. **证毕.**

引理 5.4.3 如果 R 是左自内射环且 R/S_l 满足左零化子升链条件，则 R 是半准素环且是左 PF- 环.

证明 由引理 5.4.2 知，R 是半局部环，要证 R 是半准素环只须证明 J 是幂零理想即可. $\forall a \in Z_l(R)$, ($Z_l(R)$ 表示 R 的左奇异理想). 因为 S_l 是 R 的所有本质左理想的交，从而有 $S_l a = 0$, 又因为 R 是左自内射环，有 $Z_l = J$, 故 $S_l J = 0$,

于是 $S_l \subseteq l(J)$. 下证 J 是幂零理想, 设 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ 是 J 的任一序列, 得环 R/S_l 中的右理想降链:

$$(a_1R+S_l)/S_l \supseteq ((a_1a_2)R+S_l)/S_l \supseteq ((a_1a_2a_3)R+S_l)/S_l \supseteq \cdots.$$

于是得环 R/S_l 中的左零化子升链:

$$l((a_1R+S_l)/S_l) \subseteq l(((a_1a_2)R+S_l)/S_l) \subseteq l(((a_1a_2a_3)R+S_l)/S_l) \subseteq \cdots.$$

由假设知, 存在正整数 N 使得

$$l(((a_1a_2\cdots a_N(R+S_l)/S_l) = l(((a_1a_2\cdots a_{N+k})/S_l) \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots).$$

对任意正整数 n, 由于 $a_1\cdots a_n\in J$, 又因为 $S_l \subseteq l(J) \subseteq l(a_1\cdots a_n)$, 有

$$l(((a_1a_2\cdots a_n)R+S_l)/S_l) = l(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})R/S_l.$$

事实上, 设 $b+S_l \in l(((a_1a_2\cdots a_n)R+S_l)/S_l)$, 于是有 $b\ a_1a_2\cdots a_n \in S_l$. 但由于 $S_l \subseteq l(J) \subseteq l(a_{n+1})$, 有 $b\ a_1a_2\cdots a_n \in l(a_{n+1})$, 于是 $b\ a_1a_2\cdots a_na_{n+1}=0$, 故 $b \in l(a_1\cdots a_{n+1})$. 从而 $b+S_l \in l(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})/S_l$. 易证 $l(a_1a_2\cdots a_na_{n+1})/S_l \supseteq l(((a_1a_2\cdots a_n)R+S_l)/S_l)$. 从而有 $l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1})/S_l = l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}\cdots a_{N+k})/S_l$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$, 故有

$$l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}) = l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}\cdots a_{N+k})\ (k=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

特别地, 有 $l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}) = l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}a_{N+2})$. 可以证明 $a_1a_2\cdots a_Na_{N+1} = 0$. 由于 $l(a_{N+2})$ 是 R 的本质左理想. $\forall y \in l(a_{N+2})\bigcap R(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1})$, 于是有 $ya_{N+2}=0$ 且 $y=x(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1})$ $(x\in R)$. 故 $ya_{N+2}=0=xa_1a_2\cdots a_Na_{N+1}a_{N+2}$, 因此 $x \in l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}a_{N+2}) = l(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1})$, $y = xa_1a_2\cdots a_Na_{N+1} = 0$ 于是 $l(a_{N+2})\bigcap R(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}) = 0$, 由于 $l(a_{N+2})$ 是 R 的本质左理想, 于是有 $R(a_1a_2\cdots a_Na_{N+1})=0$, 故 $a_1a_2\cdots a_Na_{N+1}=0$, 从而证明了 J 是左 T- 幂零. 因此 R/S_l 的理想 $(J+S_l)/S_l$ 也是左 T- 幂零的. 由于 R/S_l 满足左零化子升链条件, 故左 T- 幂零理想 $(J+S_l)/S_l$ 是幂零理想. 故存在整数 m 使得 $J^m \subseteq S_l$, 于是 $J^{m+1} \subseteq S_lJ=0$. 故 J 是幂零理想, 因而 R 是半准素环. **证毕**.

下证 R 是左 PF- 环. 由于 R 是半准素环, R 一定是半完全环且 S_l 是 R 的本质左理想, 由定理 4.2.1 知 R 是左 PF- 环.

定理 5.4.1 下列论述等价:

(1) R 是 QF- 环;

(2) R 是左自内射环且 R/S_l 是左 Goldie 环;

(3) R 是左自内射环且 R/S_r 是左 Goldie 环.

证明 (2) ⇒ (1). 令 $S_1 = Soc_l(R)$, 归纳地, $S_{k+1}/S_k = Soc_l(R/S_k)$. 易见 $S_k = r(J^k)$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$. 由引理 5.4.3 知 R 是半准素环. 故 R 有有限 $Socle$ 序列

$$S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_{n-1} \subseteq S_n = R.$$

只须证每个 S_k 作为左 R- 模是 Artin 模, 即可证明 R 是 QF- 环. 用数学法归纳法证明. 由引理 5.4.3 知 S_1 是 Artin 模. 由假设知 S_2/S_1 也是 Artin 模. 故 S_2 也是 Artin 模. 对 $k \geqslant 2$, 假设 S_k 是 Artin 模. 由于 R 是左 PF - 环, R 包含每个单左 R 模的一个同构像. 如果 $S_k/S_{k-1} = \bigoplus_{i=1}^m U_i$, 其中 U_i 是单左 R- 模, 则存在 R 的极小左理想 $I_1, I_2, \cdots, I_m$ 使得 $U_i \cong I_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 取内射包络得: $E(S_k/S_{k-1}) \cong \bigoplus_{i=1}^m E(U_i) \cong \bigoplus_{i=1}^m E(I_i)$. 则

$$E(S_k/S_{k-1})/(S_k/S_{k-1}) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E(U_i)/U_i \cong \bigoplus_{i=1}^{m} E(I_i)/I_i.$$

如果 I 是 R 的一个极小左理想, 则 $S_1 = I \bigoplus K$. 由于 S_1 是 R 的本质子模且 R 是左自内射环有 $R = E(S_1) = E(I) \bigoplus E(K)$. 于是 $R/S_1 = (E(I) \bigoplus E(K))/(I \bigoplus K) \cong E(I)/I \bigoplus E(K)/K$, 由于 R/S_1 是有限维的, 故对 R 的任意极小左理想 I, $E(I)/I$ 是有限维的. 从而 $E(S_k/S_{k-1})/(S_k/S_{k-1}) \cong \bigoplus_{i=1}^m E(I_i)/I_i$ 是有限维 R- 模. 由于 S_k/S_{k-1} 是 R/S_{k-1} 的本质子模, 所以有 $E(S_k/S_{k-1}) = E(R/S_{k-1})$, 故 $R/S_k \cong (R/S_{k-1})/(S_k/S_{k-1})$ 是有限维 R- 模, 从而 S_{k+1}/S_k 也是有限维 R- 模, 因而是 Artin 模, 故有 S_{k+1} 是 Artin 模. 由数学归纳法知结论成立.

(3) ⇒ (2). 由于每个极小右理想或者是幂零的或者是由一个幂等元生成. S_r 可以写成 $S_r = N + \sum_H e_iR$(其中 N 是所有幂零极小右理想的和), $\{e_iR | i \in H\}$ 是所有非幂零极小右理想作成的集合, $E_i = e_i^2$. 由于 $N \subseteq J \bigcap S_r$ 和 $S_rJ = 0$, 于是 $N^2 = 0$. 又因为对 R 的幂等元 e, eR 是极小右理想当且仅当 Re 是极小左理想, 故有 $\{Re_i | i \in H\}$ 是由幂等元生成的所有极小左理想.

(i) 先证 $\sum_H Re_i$ 和 $\sum_H e_iR$ 都是双边理想.

对 $\sum_H Re_i$, 设 $\forall a \in R$, $i \in H$ 有 Re_i 是极小左理想 Re_i 的满同态像, 故 $Re_ia = 0$ 或 $Re_ia \cong Re_i$. 如果 $Re_ia = 0$, 显然 $Re_ia \subseteq \sum_H Re_i$. 如果 $Re_ia \cong Re_i$, 由于 R 是左自内射环, 有 Re_ia 由 R 的一个幂等元生成. 故 $Re_ia \subseteq \sum_H Re_i$, 因此 $\sum_H Re_i$ 是一个双边理想. 对 $\sum_H e_iR$, 设 $\forall a \in R$, $i \in H$ 有 e_iR 是极小左理想 e_iR 的满同态像. 故 $ae_iR = 0$ 或者 $ae_iR \cong e_iR$. 如果 $ae_iR = 0$, 则 $ae_iR \subseteq \sum_H e_iR$. 如果 $ae_iR \cong e_iR$, 则 ae_iR 或者是幂零的, 或者是由一个幂等元生成. 如果 ae_iR 是幂零的, 则 Rae_i 也是幂零右理想且 $Rae_i \subseteq Re_i$. 故 $Rae_i = Re_i$, 矛盾. 故 ae_iR 不是幂零的, 于是 ae_iR 由一个幂等元生成, 从而有 $ae_iR \subseteq \sum_H e_iR$, 故 $\sum_H Re_i$ 是双边理想. 从而有 $\sum_H e_iR = R(\sum_H e_iR) = \sum_H Re_iR = \sum_H Re_i$.

(ii) 证 $A=\sum_H e_iR=\sum_H Re_i$ 的左 Goldie 维数是有限的，由于 R 是左自内射环，存在 R 的一个幂等元 e 使得 A 是 Re 的一个本质左 R- 子模. 由于 $Re_i\subseteq Re$, 对 $\forall i\in H$ 有 $e_ie=e_i$, 故 $Ae=A$. 不难证明 $Ne=0$. 因为如果 $Ne\neq 0$, 由于 A 是 Re 的本质子模有 $RN\bigcap A\neq 0$, 从而 $0\neq RNe\bigcap A=RN\bigcap Re\bigcap A=RN\bigcap A$, 由于 $N^2=0$, RN 也是幂零，于是存在一个极小左理想不妨设为 N_0 且 $N_0\subseteq A$. 于是存在一个幂等元 e_j 使得 $N_0\cong Re_j$. 又因为 R 是左自内射环， N_0 是由一个幂等元生成，这与 N_0 是幂零矛盾，因此 $Ne=0$. 由上面证明知 $N\bigcap A=0$. 由于 $Ne=0$, $S_re=(N+A)e=Ae=A$. 由于 Re/S_re 是 R/S_r 的左 R- 直和项，故 Re/S_re 的左 Goldie 维数有限，又因为 Re 是有限生成内射 R- 模，故 $S_re=A$ 的左 Goldie 维数有限.

设 S_r 只包含有限个正交幂等元.

如果 S_r 包含无限个正交幂等元 $\{e_1, e_2, \cdots\}$, 由于 S_r 是双边理想, 有 $Re_1\bigoplus Re_2\bigoplus\cdots\subseteq S_r$. 此时对 $i=1, 2, \cdots$, 有 $Ae_i\neq 0$, 由于 $e_iR\subseteq S_r(i=1, 2, \cdots)$ 有 $eR=M_i\bigoplus\sum e_jR$,(其中 M_i 是幂零极小右理想的和， e'_{j_s} 是幂等元 $(j\in H)$. 于是有 $M_i\subseteq N$, 故 $M_i^2=0$. 如果 $e_iR=M_i$, 则 e_iR 是幂零右理想. 但这是不可能的. 因此存在 $j_0\in H$ 使得 $e_{j_0}\subseteq e_iR$. 于是有 $0\neq e_{j_0}Re_{j_0}\subseteq e_{j_0}Re_iR$ 且 $e_{j_0}Re_i\neq 0$, 故 $0\neq e_{j_0}Re_i\subseteq Ae_i(i=1, 2, \cdots)$. 由于 $Ae_i\subseteq Re_i$, 有 $Ae_1\bigoplus Ae_2\bigoplus\cdots\subseteq S_r$. 又因为 A 是双边理想， $Ae_i\subseteq A$, 故 $Ae_1\bigoplus Ae_2\bigoplus\cdots\subseteq A$, 与 A 的 Goldie 维数有限矛盾. 故 S_r 只包含有限个正交幂等元. 由引理 5.4.2 的证明知， R/J 是半单 Artin 的，即 R 是半局部环. 从而有 $r(J)=S_l$ 和 $l(J)=S_r$. 由于 R 是左自内射环有 $J=Z_l(Z_l$ 是表示 R 的左奇异理想), 并且 $S_lZ_r=0$, 于是 $S_lJ=0$. 故 $S_l\subseteq l(J)=S_r$.

下证 J 是幂零理想. $\forall a\in J$, 有 $S_r=l(J)\subseteq l(a)\subseteq l(a^2)\subseteq\cdots$. 对任意正整数 k, 有 $l(a^k)/S_r\subseteq l(a^k+S_r)\subseteq l(a^{k+1})/S_r$(其中 $l(a^k+S_r)$ 表示 a^k+S_r 在环 R/S_r 中的左零化子). 显然有 $l(a^k)/S_r\subseteq l(a^k+S_r)$. $\forall b+S_r\in l(a^k+S_r)$, 有 $ba^k\in S_r\subseteq l(a)$, 从而有 $ba^{k+1}=0$, 故 $b+S_r\in l(a^{k+1})/S_r$.

由于 R/S_r 是左 Goldio 环，存在正整数 N 使得 $l(a^N+S_r)=l(a^{N+k}+S_r)(k=1,2,\cdots)$, 从而有 $l(a^{N+1})=l(a^{N+1+k})(k=1, 2, \cdots)$. 易证 $Ra^{N+1}\cap l(a)=0$, 又因为 $a\in Z_l$, 有 $Ra^{N+1}=0$, 从而有 $a^{N+1}=0$ 即 a 是幂零元. 从而有 $(J+S_r)/S_r$ 是 R/S_r 的一个诣零理想. 又因为 R/S_r 是左 Goldie 环，有 $(J+S_r)/S_r$ 是幂零的，故存在正整数 m 使得 $J^m\subseteq S_r$. 从而有 J 是幂零理想，故 R 是半准素环. 又因为 R 是左自内射环. 故 R 是左 PF- 环. 从而有 $S_r=S_l$, 故 R/S_r 是左 Goldie 环. **证毕**.

推论 5.4.1　设 R 是左自内射环，则下列条件等价：

(1) R 是 QF- 环;

(2) R/S_l 是右 Noether 环;

(3) R/S_r 是左 Noether 环;

(4) R/S_l 是左 Noether 环;

(5) R/S_r 是右 Noether 环.

证明 由定理 5.4.1 知 (3) 、 (4) $\Rightarrow$ (1) 成立. 由定理 5.3.1 知 (5)$\Rightarrow$(1) 成立. 假设 R/S_l 是右 Noether 环, 先证 R 是半局部环. 由假设不难证明对 R 的任意理想 A 有 $(R/A)/Soc_l(R/A)$ 也是左 Noether 环, 特别地, $(R/J)/Soc_l(R/J)$ 是右 Noether 环, 由于 R/J 是 Von.Neumann 正则环且是左自内射环. 于是有 $Soc_l(R/J) = Soc_r(R/J)$, 由定理 5.3.1 知, R/J 是 QF- 环, 故 R/J 是半单 Artin 环.

由于 R 是左自内射环, 有 $J = Z_l$, 从而对 $\forall a \in J$, $l(a)$ 是 R 的本质左理想, 故有 $S_l \subseteq l(a)$, $S_lJ = 0$, 于是 S_l 可以作成 R/J- 模. 从而有 S_l 是完全可约 R/J - 模, 作为 R- 模, S_l 也是完全可约的, 于是 $S_l \subseteq S_r$, 又因为 $R/S_r \cong (R/S_l)/(S_r/S_l)$, 故 R/S_r 也是右 Noether 环. 由定理 5.3.1 知 R 是 QF- 环. **证毕**.

在文献 [161] 中我们也研究了 QF- 环的一些特征性质, 主要结果如下.

定理 5.4.2 设环 R 的每个单右 R- 模有限表现且每个右 R- 模都有单的本质平坦络, 则下列条件等价:

(1) R 为 QF 环;

(2) R 为半局部环;

(3) R/N 上所有模都有单的本质的平坦包络;

(4) S 作为右 R- 模为有限生存的;

(5) R 为右 Kasch 环且关于左零化子满足升链条件;

(6) 对 R 的任意右理想集 $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 满足 $l(\bigcap I_\lambda) = \sum l(I_\lambda)$;

(7) 对 R 的任意左理想集 $\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, 满足 $r(\bigcap I_\lambda) = \sum r(I_\lambda)$.

定理 5.4.3 设环 R 上每个左 R- 模都有单的本质的平坦包络, 则下列条件等价:

(1) R 为 QF 环;

(2) R/N 为左 Kasch 环且对任意本原左理想 P 有 $_RP$ 为有限生成;

(3) $_RR$ 为自内射, $R/$ sing$R$ 为 Kasch 环且对任意本原左理想 P 有 $_RP$ 为有限生成;

(4) $R/$ sing$R$ 为左 Kasch , R 为 Goldie 环且对任何本原左理想 P 有 $_RP$ 为有限生成;

(5) 对任何模 M 有 $F(M) = E(M)$, 其中 $F(M)$ 和 $E(M)$ 分别为 M 的平坦和内射包络;

(6) 对任意模 M 的本质子模 N 有 $M \subseteq F(N)$, 从而 $F(M) = F(N)$.

上述两个定理中符号的意义如下: N 分别表示环的 Wedderburn 根, S 表示环的基座, Sing$R$ 表示环的奇异理想. 限于篇幅, 我们省去其证明.

第 6 章　内射性的若干推广

本章中，我们介绍内射性的几种重要推广：FP- 内射、 f- 内射、 P- 内射、 GP- 内射、 sim- 内射、 min- 内射、 max- 内射、 FGT- 内射性与 CT- 内射性，他们之间的关系如下：

内射性 $\Rightarrow$ FP- 内射性 $\Rightarrow$ f- 内射性 $\Rightarrow$ P- 内射性 $\Rightarrow$ GP- 内射性 $\Rightarrow$sim- 内射性 $\Rightarrow$min- 内射性；

内射性 $\Rightarrow$max- 内射性；

内射性 $\Rightarrow$ FGT- 内射性 $\Rightarrow$ CT- 内射性.

每一个箭头都是不可逆转的. 我们系统地论述了这些广义内射性的性质并揭示了他们与一些著名问题间的联系.

§6.1　FP- 内射性

本节中，我们研究内射性的一种同调推广，并研究与之相关的 Faith-Menal 猜想.

定义 6.1.1　(1) 称左 R- 模 M 为 FP**(finitely presented)- 内射模**, 如果

$$Ext^1_R(F, M) = 0,$$

对任意有限表现的左 R- 模 F 成立；

(2) 称环 R 为左 **FP- 内射环**, 如果左正则模 ${}_RR$ 是左 FP- 内射模.

易知 FP- 内射模的直积仍为 FP- 内射模. 下面我们研究 FP- 内射模的直和. 为此需要一些准备工作.

取定任意有限表现的左 R- 模 F, 以及左 R- 模的正向系 $\{M_i|i \in I\}$. 我们考虑下面的典范同态

$$\xi_n : \lim_{\rightarrow} Ext^n_R(F, M_i) \rightarrow Ext^n_R(F, \lim_{\rightarrow} M_i),$$

注意左 R- 模 F 有限表现等价于对任意左 R- 模的正向系 $\{M_i|i \in I\}$ 说 ξ_0 为同构.

命题 6.1.1　$\xi_1 : \lim_{\rightarrow} Ext^1_R(F, M_i) \rightarrow Ext^1_R(F, \lim_{\rightarrow} M_i)$ 为单同态.

证明　我们将采用关于 Ext 函子的 Yoneda 定义，从而

$$\xi_n : \lim_{\rightarrow} Ext^n_R(F, M_i) \rightarrow Ext^n_R(F, \lim_{\rightarrow} M_i)$$

是由长正合列的推出构造诱导出来的. 假定我们由下面的正合交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & M_i & \to & N_i & \to & F & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \varinjlim M_i & \to & F & \to & F & \to & 0, \end{array}$$

其中下面一行分裂. 对 $j \geqslant i$, 我们可以选择 $0 \to M_j \to N_j \to F \to 0$ 作为上面一行的推出, 从而下面一行变成

$$0 \to \varinjlim M_j \to \varinjlim N_j \to F \to 0,$$

因为 F 有限表现, 分裂同态 $F \to \varinjlim N_j$ 可以通过某个 N_j 来分解, 从而就可以定义 $0 \to M_j \to N_j \to F \to 0$ 的分裂同态. **证毕.**

命题 6.1.2 如果 $\{M_i | i \in I\}$ 是某个模的子模的正向系, 则

$$\xi_1 : \varinjlim Ext_R^1(F, M_i) \to Ext_R^1(F, \varinjlim M_i)\text{为同构.}$$

证明 只需证明 ξ_1 为满射. 假定存在正合列

$$0 \to \bigcup_{i \in I} M_i \to N \to F \to 0,$$

则存在 N 的有限生成子模 N', 并且 N' 以 F 为同态像. 则我们可得交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K & \to & N' & \to & F & \to & 0 \\ & & \alpha \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & \bigcup_{i \in I} M_i & \to & N & \to & F & \to & 0, \end{array}$$

因为 K 有限生成, α 可以通过某个 M_i 来分解. 由此可知所给的正合列 $0 \to \bigcup_{i \in I} M_i \to N \to F \to 0$为正合列$0 \to M_i \to N'' \to F \to 0$的推出. **证毕.**

推论 6.1.1 如果 $\{M_i | i \in I\}$ 是某个模的 FP- 内射子模的正向系, 则其并 $\bigcup_{i \in I} M_i$ 为 FP- 内射模.

推论 6.1.2 FP- 内射模的直和也为 FP- 内射模.

我们知道在 QF- 环上有限生成模是自反的, 在 V.N.Neumann 正则环上有限表现模也是自反的. 下面我们将用无挠模 (torsionless module) 给出 FP- 内射环的刻画. 为此我们需要 Auslander 提出的模转置的概念.

设 M_R 的极小投射分解的前两项为

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \to M_R \to 0.$$

则 $M \cong co\ker f$. 应用对偶函子 $M^* = Hom_R(M, R)$, 则我们可得下面的交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \rightarrow & \ker f & \rightarrow & F_1 & \xrightarrow{f} & F_0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \leftarrow & co\ker f^* & \leftarrow & F_1^* & \xleftarrow{f^*} & F_0^* & \leftarrow & M^* & \leftarrow & 0 \end{array}$$

称 $co\ker f^*$ 为模的转置 (transpose), 并记为 TrM.

下面的引理将对我们的讨论十分有用，原始的证明可以在文献 [12] 或文献 [87] 中找到.

引理 6.1.1　对 M_R, TrM 为 M 的转置. 则有下面的短正合列

$$0 \rightarrow Ext^1(TrM, R) \rightarrow M \rightarrow M^{**} \rightarrow Ext^2(TrM, R) \rightarrow 0,$$

其中 $M \rightarrow M^{**}$ 为典范同态.

定理 6.1.1　环 R 为左 FP- 内射环，当且仅当每个有限表现的右 R- 模 M_R 无挠.

证明　必要性. 令 TrM 为 M 的转置，则有下面的短正合列

$$0 \rightarrow Ext^1(TrM, R) \rightarrow M \rightarrow M^{**} \rightarrow Ext^2(TrM, R) \rightarrow 0.$$

又因为 $TrM = co\ker f^*$ 有限表现，所以 R 的左自反性表明 $Ext^1(TrM, R) = 0$. 由此可知典范映射 $M \rightarrow M^{**}$ 为单同态，即 M_R 无挠.

充分性. 令 $_RM$ 为有限表现左 R- 模，并设 $_RM$ 的极小投射分解的前两项为

$$F_1 \xrightarrow{f} F_0 \rightarrow M_R \rightarrow 0.$$

应用对偶函子 $M^* = Hom_R(M, R)$, 我们可得下面关于右 R- 模的短正合列

$$0 \rightarrow M^* \rightarrow F_1^* \xrightarrow{f^*} F_0^* \rightarrow TrM \rightarrow 0.$$

对此短正合列的右半部分应用上面引理，得下面得短正合列

$$0 \rightarrow Ext^1({}_RM, R) \rightarrow TrM \rightarrow (TrM)^{**}.$$

又因为 $TrM = co\ker f^*$ 为有限表现模, 所以 TrM 无挠. 由此可得 $Ext^1({}_RM, R) = 0$, 所以 R 为左 FP- 内射环.　　**证毕**.

推论 6.1.3　若 R 为左 FP- 内射环，则每个有限生成右理想都是零化子.

证明　这是因为，对任意有限生成右理想 I_R, 此时 R/I 无挠.　　**证毕**.

我们知道 FP- 内射性为内射性的真推广，自然要问 FP- 内射模何时为内射模？为此，我们需要线性紧模的概念.

考虑 R- 模 M 的子模族 $\{M_\alpha|\alpha \in A\}$ 以及 $\{m_\alpha \in M|\alpha \in A\}$. 称系统 $\{(m_\alpha, M_\alpha)|\alpha \in A\}$ 是有限可解的, 如果对 A 的任意有限子集 F, 都存在元素 $m_F \in M$ 使得同余式 $m_F \equiv m_\alpha(\bmod M_\alpha)$ 对任意 $\alpha \in F \subseteq A$ 均成立. 称系统 $\{(m_\alpha, M_\alpha)|\alpha \in A\}$ 是可解的, 如果 $m \in M$ 使得同余式 $m \equiv m_\alpha(\bmod M_\alpha)$ 对任意 $\alpha \in A$ 都成立. 称 R-模 M 是 (依离散拓扑)**线性紧的**, 如果每个有限可解的同余式 $m \equiv m_\alpha(\bmod M_\alpha)$, $\alpha \in A$ 都是可解的. 对 M_R, 设 $A(M)$ 表示 M 的形如这样的 $\{x \in M\,|xI = 0\}$ 子集构成的簇, 其中 I 为环 R 的右理想. 我们称 M 为 **半紧致的**, 如果同余式 $m \equiv m_\alpha(\bmod M_\alpha)$ 的每个有限可解均在 M 中有解, 其中 $x_\alpha \in M$, $M_\alpha \in A(M)$.

E. Matlis 在文献 [91] 利用上述概念给出了下列定理.

定理 6.1.2 设 R 为任意环, FP- 内射模 M_R 为内射模当且仅当 M_R(依离散拓扑) 为半线性紧模.

FP- 内射性与纯正合列有着紧密的联系. 称右 R- 模的短正合列

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

为 **纯正合列**, 如果它和任意左 R- 模 L 作张量积后均保持序列的正合性, 即有下面的短正合列

$$0 \to K \otimes L \to M \otimes L \to N \otimes L \to 0.$$

定理 6.1.3 设 R 为任意环, M_R 为任意右 R- 模. 则以下条件等价

(1) 模 M_R 为 FP- 内射模;

(2) 若 K 为自由模 F 的有限生成子模, 则任意同态 $K \to M$ 都可以扩张成同态 $F \to M$;

(3) 每个以 M_R 为首项的正合列 $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ 都是纯正合列;

(4) 存在以 M_R 为首项的短正合列 $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$, 并且 M' 为 FP- 内射模.

证明 由定义可以直接验证之. **证毕.**

最后我们介绍著名的 Faith-Menal 猜想.

1977 年, Johns 研究了每个右理想均为右零化子的右 Noether 环, 他证明了此类环为右 Artin 环, 但后来发现他采用了 Kursan 的一个错误结论. 1992 年, Faith-Menal 给出了一个反例, 说明 Johns 所讨论的环 (后来人们称此环为右 Johns 环) 不是右 Artin 环. 1994 年, Faith-Menal 研究了每个矩阵环 $M_n(R)$ 均为右 Johns 环的环 R(强右 Johns 环). 他们证明了环 R 为强右 Johns 环等价于 R 为右 Noether 环且每个有限表现的右 R- 模 M_R 无挠, 也等价于 R 为右 Noether 环的左 FP- 内射环. 我们知道右 Johns 环不是右 Artin 环, 但可以问强右 Johns 环是不是右 Artin 环. 注意到 1969 年 Rutter 证明了如果 R 为右 Artin 环且有限表现的右 R- 模 M_R 无挠, 则 R 为 QF- 环. 因此上述问题就等价于问强右 Johns 环是不是

QF- 环. Faith-Menal 猜想此结论成立，这就是著名的 Faith-Menal 猜想. 我们在后面的第八章还要专门讨论此猜想的进展情况.

§6.2　f- 自内射和 P- 自内射环

我们回忆一下，环 R 称为右 (左)f- **内射**, 如果对每个同态 $f: I \to R$(其中 I 是有限生成的右 (左) 理想) 存在 $c \in R$, 使得对任意 $x \in I$ 有 $f(x) = cx(xc)$.

下面这个定理是 Ikeda-Nakayama 在 1954 年给出的，已在环的内射性理论中得到了广泛的应用.

定理 6.2.1　设 R 为任意环. 则 R 是左 f- 内射当且仅当 R 满足下列两个条件

(1) $r(L_1 \bigcap L_2) = r(L_1) + r(L_2)$ 对任意一对有限生成的左理想 L_1 和 L_2；

(2) 对任意主右理想 aR 有 $aR = r(l(aR))$.

证明　必要性.　(1) 任取 $a \in r(L_1 \bigcap L_2)$. 定义同态 $f: L_1 + L_2 \to R$. 当 $b \in L_1$, $f(b) = b$; $b \in L_2$ 时，$f(b) = b(1+a)$, 当 $b \in L_1 \bigcap L_2$, 这两种表示是一致的. 由于 R 是左 f- 内射，故存在 $c \in R$, 使得 $f(b) = bc(b \in L_1)$, 从而有 $bc = b$, 即 $b(c-1) = 0$, 故 $c - 1 \in r(L_1)$. 当 $b \in L_2$ 时，$f(b) = bc = b(1+a)$, 即 $b(1+a-c) = 0$, 即 $1 + a - c \in r(L_2)$, $a = (c-1) + (1+a-c)$ 故 $a \in r(L_1) + r(L_2)$.

(2) 只须证对任意 a, 有 $r(l(aR)) = aR$ 即可. 对任意 $b \in r(l(aR))$ 有 $l(aR) \subseteq l(b)$, 定义同态 $f: Ra \to Rb$, 对任意 $x \in R$, $f(xa) = xb$. 由于 R 是左 f- 内射，因此存在 $c \in R$ 使得 $f(a) = ac = b$, 故 $b \in aR$. 从而可得 (2).

充分性. 设 L 是 R 的有限生成左理想，并考虑同态 $f: L \to R$. 不防设 $L = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$, 我们对 L 的生成元个数 n 用数学归纳法. 当 $n = 0$ 时，显然成立. 假设生成元个数 $\leqslant n-1$ 时成立，下证生成元个数为 n 时也成立. 令 $L' = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_{n-1}$. 由归纳假设知，存在 $c, c' \in R$ 使得

$$f(a) = \begin{cases} ac & 若\ a \in Ra_n \\ ac' & 若\ a \in L' \end{cases}$$

当 $a \in L' \bigcap Ra_n$ 时 $f(a) = ac = ac'$, 从而 $a(c - c') = 0$, 即

$$c - c' \in r(L' \bigcap Ra_n) = r(L') + r(Ra_n)$$

故存在 $b \in r(Ra_n)$ 以及 $b' \in r(L')$ 使得

$$c - c' = b + b'$$

令 $h = c - b = b' + c'$, 则对任意 $x \in L$, 有 $f(x) = xh$, 即 f 可以表示成 $h = c - b = b' + c'$ 右乘，故 R 是左 f- 内射.　**证毕.**

环 R 称为右 (左)P- **内射**, 如果对每个同态 $f: aR(Ra) \to R$, 存在 $c \in R$ 使得对任意 $x \in I$ 有 $f(x) = xc(cx)$, 其中 $a \in R$.

下面这个定理是由 Nicholson-Yousil 在 1995 年给出的.

定理 6.2.2 对任意环 R, 下列条件等价:

(1) R 是左 P- 内射;

(2) $r(l(aR)) = aR$, 对任意 $a \in R$;

(3) 如果 $l(b) \subseteq l(a)$(其中 $a, b \in R$), 则 $aR \subseteq bR$;

(4) $r(Rb \bigcap l(a)) = r(b) + aR$, 对任意 $a, b \in R$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 设 R 是左 P- 内射, 任意 $a \in R$, aR 是一个主右理想. 令 b 是 $r(l(aR))$ 中的任意一个元素, 有 $l(b) \supseteq l(aR)$, 作如下映射 $f: Ra \to Rb$ 使得对于任意 $xR, f(xa) = xb$, 显然 f 是满同态. 由于 R 是左 P- 内射, 必存在 $c \in R$ 使得 $f(a) = ac = b$, 所以 $b \in aR$. 即证明了 $r(l(aR)) = aR$.

(2)$\Rightarrow$(1). 设 Ra 是 R 中的任意左理想, $f: Ra \to R$ 是任一个左 R- 模同态. 显然有 $f(a) \in r(l(aR)) = aR$, 故存在 $c \in R$ 使得 $f(a) = ac$, 从而 f 是一个右乘变换, 故 R 是左 P- 内射.

(1)$\Leftrightarrow$(3). 同理可证.

(4)$\Rightarrow$(2). 取 $b = 1$ 即可.

(2)$\Rightarrow$(4). 显然左边包含右边, 下证右边包含左边. 任意 $x \in r(Rb \bigcap l(a))$, 有 $l(ba) \subseteq l(bx)$, 由 (3) 知 $(bx)R \subseteq (ba)R$ 从而存在 r, 使得 $bx = bar$, 即 $b(x - ar) = 0$. 即 $x - ar \in r(b)$, 故 $x \in r(b) + aR$. **证毕**.

命题 6.2.1 如果 R 是右 P- 内射, 则 $J = Z_r$.

证明 如果 $a \in Z_r$, 由于 $r(a) \bigcap r(1-a) = 0$ 有 $r(1-a) = 0$. 故 $R = lr(1-a) = R(1-a)$, 即有 $J \supseteq Z_r$. 反之, 如果 $a \in J$, 若 $bR \bigcap r(a) = 0$, $b \in R$, 证 $b = 0$ 即可. 由定理 6.2.1 知 $l(b) + Ra = 1(bR \bigcap r(a)) = R$, 从而有 $l(b) = R$. **证毕**.

推论 6.2.1 如果 R 是双边 P- 内射环, 则 $Z_l = Z_r$.

称环 R 为右 n- **内射环**, 如果对任意 n- 生成右理想 $\sum_{i=1}^{n} a_i R$, 任意 R- 同态 $\sum_{i=1}^{n} a_i R \to R_R$ 都可以扩张成环 R 的自同态.

定理 6.2.3 若矩阵环 $M_n(R)$ 为右 P- 内射环, 则 R 为右 n- 内射环.

证明 给定 n- 生成右理想 $I = b_1 R + b_2 R + \cdots b_n R$, 考虑 R- 同态 $\alpha: I \to R_R$.

记

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

并记

$$B^\alpha = \begin{bmatrix} \alpha b_1 & \alpha b_2 & \cdots & \alpha b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

若存在 $X \in M_n(R)$ 使得 $BX = 0$, 则 $B^\alpha X = 0$, 即 $B^\alpha \in lr(B)$. 再由 $M_n(R)$ 为 P-内射环知 $lr(B) = M_n(R)B$. 因此 $B^\alpha \in M_n(R)B$. 因此，存在 $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$ 使得 $B^\alpha = AB$, 由此可知 $\alpha = a_{11}\cdot$, 即证 R 为右 n- 内射环.　　**证毕.**

注记　Rutter 曾给出了右 P- 内射环不是右 2- 内射环的例子 (见文献 [130]).

命题 6.2.2　设 R 是右 P- 内射，　$b \in R$, 则有:

(1) 如果 bR 能嵌入 aR 中，则 Rb 是 Ra 的同态像;

(2) 如果 aR 是 bR 的同态像，则 Ra 能嵌入 Rb 中;

(3) 如果 $bR \cong aR$, 则 $Ra \cong Rb$.

证明　(1) 如果 $f : bR \to aR$ 是单同态. 由 R 是右 P- 内射, 从而存在 $v \in R$ 使得 $f(x) = vx$(任意 $x \in bR$), $f(b) = vb = a\mu(\mu \in R)$. 定义映射 $g : Ra \to Rb, g(ra) = ra\mu(\forall r \in R)$, 由 $r(vb) \subseteq r(b)$ 有 $Rb \subseteq Rvb$, 即存在 $r \in R$ 使得 $b = rvb = g(ra)$, 故 g 是满同态.

(2) 如果 $f : bR \to aR$ 是满同态，令 v, μ 和 g 如 (1) 定义，有 $a = f(bs) = vbs$, $s \in R$, 任意 $ra \in \ker g$ 有 $g(ra) = 0 = ra\mu = rvb$, 因此 $ra = rvbs = 0$, 故 g 是单同态.

(3) 由 (1) 和 (2) 知结论成立.　　**证毕.**

值得指出的是, 如果 aR 在右 P- 内射中是内射的, 则 Ra 也是内射的. 于是如果 R 是右 PP- 环 (即主右理想投射), 则 R 是左 PP- 环, 因此 $Ra = lr(a) = R(1-e)$. 在下面我们用 $N|M$ 表示 N 是 M 的一个直和项.

命题 6.2.3　设 R 是右 P- 内射，　$a, b \in R$. 则有:

(1) 如果 $bR \cong aR$ 且 $bR|R$, 则 $aR|R$;

(2) 如果 $aR|R$, $bR|R$ 且 $aR \cap bR = 0$, 则 $(aR \oplus bR)|R$.

证明　(1) 如果 $bR = eR$, $e^2 = e$, 令 $f : aR \longrightarrow bR$ 是一个同构. 令 $f(a) = bd$, $f^{-1}(e) = ac$, 于是 $bdc = f(ac) = e$, 因此 $h = cbd$ 是一个幂等元且 $ah = f^{-1}(bd) = a$,

故 $Ra \subseteq Rh$, 由于 $hr = cf(ar)(\forall r \in R)$. 从而有 $r(a) \subseteq r(h)$, 于是有 $Rh \subseteq Ra$, 故 $Ra = Rh$.

(2) 设 $aR = eR$, $e^2 = e$, 从而有 $aR \oplus bR = eR \oplus (1-e)bR$, 故 $(1-e)bR \cong bR$, 由 (1) 知 $(1-e)bR = gR$, $g^2 = g$, 显然 $g \in (1-e)bR$, 存在 r 使得 $g = (1-e)br$, $eg = e(1-e)br = 0$, 令 $h = e + g - ge$ 是一个幂等元, 故 $aR \oplus bR = hR$. **证毕**.

从命题 6.2.3, 我们直接得到下面的推论.

推论 6.2.2 如果 R 是右 P- 内射, 对 $a \in R$, 则下列条件等价:

(1) R 是投射的;

(2) $aR|R$;

(3) aR 是 P- 内射.

我们回忆一下, 模 M 称为 **弱内射**, 如果对 $E(M)$ 的每个有限生成的子模 $N \subseteq E(M)$ 存在 $X \cong M$ 使得 $N \subset X \subset E(M)$. 下面给出一个有趣的结果.

定理 6.2.4 R 是右自内射当且仅当 R 是右 P- 内射且 R_R 是弱内射.

证明 (1) 必要性显然.

(2) 充分性, 要证 R 是右自内射, 即证 R_R 是内射. 转化为证 $E(R_R) = R_R$. 显然 $R_R \subseteq E(R_R)$, 下证 $E(R_R) \subseteq R_R$, 对任意 $a \in E(R_R)$, 只须证 $a \in R_R$ 即可. 由假设有 $R \oplus aR \subseteq X \subseteq E(R_R)$(其中 $X \cong R_R$), 因此 X 满足命题 6.2.2, 故 $R_R|X$. 由于 R_R 在 $E(R_R)$ 中是本质的, 所以有 $R = X$, 即证 $a \in R_R$. **证毕**.

定理 6.2.5 如果 R 是半完全右 P- 内射环, 则 $R \cong R_1 \times R_2$, 其中 R_1 是半单环, R_2 的每个单右理想都是幂理想.

证明 设 $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, 其中 e_i 是正交本原幂等元. 假设对 $1 \leqslant i \leqslant m$, e_iR 是单右理想, $i > m$, e_iR 不是单右理想. 下证对所有 $1 \leqslant i \leqslant m < j \leqslant n$ 有 $e_iRe_j = 0 = e_jRe_i$. 如果 $0 \leqslant a \in e_iRe_j$, 左乘变换 $ae_jR \longrightarrow e_iR$ 是满同态 (因为 e_iR 是单的), 又因为 e_jR 不可分. 与 $a\cdot$ 是同构矛盾. 以下假设 $0 \neq b \in e_jRe_i$, 则左乘变换 $b\cdot : e_iR \to e_jR$ 是单同态 (由 e_iR 是单的). 由命题 6.2.2 知 $be_iR|e_jR$ 矛盾.

因此, $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_m$ 是一个中心幂等元, $R_1 = eR$ 半单, 下证每个单右理想 $K \subseteq (1-e)R$ 是幂零右理想. 如果 K 不是幂零右理想, 则 $K = iR$, $f = f^2$. 由于 $K(1-e) \neq 0$ 存在某个 $j > m$ 有 $iRe_j \neq 0$, 其中 $e_iR \cong fR$ 矛盾. **证毕**.

引理 6.2.1 设 R 是环, S 是 R 的一个理想使得 R/S 满足右零化子升链条件. 如果 $Y_1, Y_2, \cdots$ 是 $l(S)$ 的子集, 则存在 $n \geqslant 1$ 使得 $r(Y_{n+1}Y_n \cdots Y_1) = r(Y_nY_{n-1} \cdots Y_1)$, 其中 Y_iY_j 表示集合论积.

证明 令 $R' = R/S$, 用 $r \mapsto r'$ 表示自然同态 $R \to R'$. 则

$$r(Y_1') \subseteq r(Y_2'Y_1') \subseteq r(Y_3'Y_2'Y_1') \subseteq \cdots,$$

由假设知存在 $n \geqslant 1$, 有

$$r(Y'_{n+1}Y'_nY'_{n-1}\cdots Y'_1) = r(Y'_nY'_{n-1}\cdots Y'_1).$$

如果 $a \in r(Y_nY_{n-1}\cdots Y_1)$ 有

$$Y'_nY'_{n-1}\cdots Y'_1a' = 0,$$

故

$$Y_nY_{n-1}\cdots Y_1a \subseteq S \subseteq r(Y_{n+1}).$$

于是 $Y_{n+1}(Y_nY_{n-1}\cdots Y_1a) = 0$. **证毕**.

Armandariz 和 Park 用文献 [4] 中自内射情形类似的方法证明了下面的结果.

定理 6.2.6 如果 R 是右 P- 内射, R/S_r 满足右零化子升链条件, 则 J 是幂零理想.

证明 由命题 6.2.1 知 $JS_r = 0$, 于是 $J \subseteq l(S_r)$. 只须证明 J 是右 T- 幂零 [则由假设知 $(J+S_r)/S_r$ 是 R/S_r 的幂零理想]. 设 $a_1, a_2, \cdots$ 是 J 中的一族元, 只须证存在一个 n 使得 $a_n\cdots a_2a_1 = 0$. 由引理 6.2.1 知存在 n 使得 $r(a_{n+1}a_n\cdots a_2a_1) = r(a_n\cdots a_2a_1)$. 由定理 6.2.2 知有 $\mathrm{R}a_{n+1}a_n\cdots a_2a_1 = \mathrm{R}a_n\cdots a_2a_1$. **证毕**.

下面我们研究群环的 P- 内射性. 设 F 为任意域, G 为任意群. Connell 曾经证明若群环 FG 为自内射环, 则群 G 为局部有限群. Renault 改进了此结果, 他证明若群环 FG 为自内射环, 则 G 为有限群. Farkas 进一步证明群环 FG 为 P-内射环当且仅当群 G 为局部有限群. 现在我们将 Farkes 的结果推广到任意系数环 R 上.

定理 6.2.7 设 R 为任意环, G 为任意群. 则

(1) 环 RG 为右 P- 内射环, 则 R 为右 P- 内射环, 且 G 为局部有限群;

(2) 若 R 为右自内射环, 且 G 为局部有限群, 则群环 RG 为右 P- 内射环.

证明 (1) 假设存在 $a, b \in R$ 使得 $r_R(b) \subseteq r_R(a)$, $r_{RG}(b) \subseteq r_{RG}(a)$. 再由群环 RG 为右 P- 内射环知 $a \in RGb$. 因此 $a \in Rb$, 即证 R 为右 P- 内射环. 为证 G 为局部有限群, 只需证明对任意 $g \in G$ 以及有限子群 $H \leqslant G$, $\langle H, g\rangle$ 为有限子群. 设 $y = \sum\limits_{h\in H} h$, 并令 $x = (1-g)y$. 则 $r_{RG}(y) \subseteq r_{RG}(x)$.

我们断言 $r_{RG}(y) \neq r_{RG}(x)$. 假设 $r_{RG}(y) = r_{RG}(x)$, 则由群环 RG 为右 P- 内射环知 $RGy = RGx$, 因此存在 $z \in RG$ 使得 $y = zx = z(1-g)y$. 令 $\omega(RH)$ 为增广理想, 则 $(1 - z(1-g)) \in l_{RG}(y) = RG\cdot\omega(RH)$. 但是 $1 \in RG(1-g) + \omega(RH) \subseteq \omega(RG)$, 矛盾. 故 $r_{RG}(y) \neq r_{RG}(x)$.

现选取 $z \in r_{RG}(x)\backslash r_{RG}(y)$, 则 $yz \neq 0$ 并且 $(1-g)yz = 0$. 因为对任意 $h \in H$ 有 $(1-h)y = 0$, 故可得 $\langle H, g\rangle \subseteq \{h \in G|(1-h)yz = 0\}$. 又因为 H 为有限群, 故 $\{h \in G|(1-h)yz = 0\}$ 为有限群. **证毕**.

(2) 假设存在 $x, y \in RG$ 使得 $r_{RG}(y) \subseteq r_{RG}(x)$. 因为 G 为局部有限群，故可选择有限子群 $H \leqslant G$ 使得 $x, y \in RH$. 因此

$$r_{RH}(y) = r_{RG}(y) \cap RH \subseteq r_{RG}(x) \cap RH = r_{RH}(y).$$

因为 H 为有限群, 故由 Connell 定理知群环 RH 为自内射环, 从而 $x \in RHy \subseteq RGy$. 即证群环 RG 为右 P- 内射环. **证毕.**

由此我们得到下面 Farkes 在 1975 年的一个结论.

推论 6.2.3 设 F 为任意域, G 为任意群. 则以下条件等价:

(1) 群环 FG 为右 P- 内射环;

(2) 群 G 为局部有限群;

(3) 群环 FG 为左 P- 内射环.

注记 若 R 为右 P- 内射环, 且 G 为局部有限群, 则群环 RG 不一定为右 P- 内射环. 也有一些学者如 Camillo 等研究过交换 P- 内射环, 我们在此省去这部分.

§6.3 GP- 自内射环

在文献 [172] 中 Yue Chi Ming 引入了 YJ- 内射模和 YJ- 内射环的概念. 后来, YJ- 内射称为 GP- 内射.

一个模 M 称为右 (左)GP- 内射如果 $M_R({}_RM)$ 满足下面的条件: 对任意 $0 \neq a \in R$, 存在一个正整数 n 使得 $a^n \neq 0$ 并且任一个从 $a^nR(Ra^n)$ 到 M 的 R- 同态都可以扩张成一个 R 到 M 的 R- 同态. 环 R 称为右 (左)GP- 内射环, 如果 $R_R({}_RR)$ 是 GP- 内射.

YJ - 内射或 GP- 内射环被广泛地研究. 见文献 [171], [172], [175], [176], [177], [178], [30], [105] 和 [168]. 关于 P- 内射的许多结果都可以推广到 GP- 内射环上.

例如: S. B. Nam, N. K. Kim 和 J. K. Kim 在文献 [105] 证明了下面的结果:

(1) R 是右 GP- 内射环当且仅当对任意 $0 \neq a \in R$ 存在一个正整数 n 满足 $a^n \neq 0$ 且 $Ra^n = lr(a^n)$.

(2) 如果 R 是右 GP- 内射环, 则 $J = Z_r$.

J. L. Chen 和 N. Q. Ding 在文献 [30] 中研究了加上某些条件的 GP- 内射环. 得到了许多结果, 并且推广了一些已知的结果.

直到 1998 年, W. M. Xue 才在文献 [168] 中举出例子说明了 YJ- 内射或 GP- 内射环是 p- 内射环的真正推广. 我们由 GP- 内射环的定义可以得到下列引理.

引理 6.3.1 下列论述等价:

(1) R 是一个右 GP- 内射环.

(2) 对任意 $0 \neq a \in R$, 存在一个正整数 n 使得 Ra^n 是一个非零左零化子.

定理 6.3.1　如果 R 是一个右 GP- 内射环, 则 $J(R) = Z_r(R)$.

证明　先证 "$\subseteq$". 设 $x \in J(R)$, 我们只须证 $x \in Z_r(R)$ 即可. 如果 $x \notin Z_r(R)$, 则存在一个非零右理想 I 使得 $I \bigcap r(x) = 0$. 于是存在 $0 \neq s \in I$ 但 $xs \neq 0$. 由引理 6.3.1 知, 存在一个正整数 n 使得 $R(xs)^n$ 是一个非零左零化子, 即存在 R 的一个子集 S 使得 $R(xs)^n = l(S)$. 令 $a = (xs)^n$, $b = s(xs)^{n-1}$. 对任意 $t \in r(a)$, 有 $at = 0$, 即 $(xs)(xs)^{n-1}t = 0$. 于是 $(xs)^{n-1}t \in r(xs)$, 由于 $sR \bigcap r(x) = 0$ 有 $r(xs) = r(s)$, 从而 $(xs)^{n-1}t \in r(s)$, 故 $s(xs)^{n-1}t = 0$, 于是 $t \in r(b)$ 显然有 $r(b) \subseteq r(a)$, 故 $r(a) = r(b)$. 又由于 $b \in Rb \subseteq l(r(b)) = l(r(a)) = l(r((as)^n)) = l(r(l(S))) = l(S) = R(xs)^n = Ra$, 故存在 $y \in R$ 使得 $b = ya$. 于是 $0 = b - ya = (1 - yx)s(xs)^{n-1}$. 由于 $x \in J(R)$, 故 $1 - yx$ 是可逆元, 从而得 $b = s(xs)^{n-1} = 0$, 于是 $a = 0$ 矛盾. 故 $x \in Z_r(R)$.

下证 "$\supseteq$". 设 $z \in Z_r(R)$, 于是对任意 $c \in R$ 都有 $r(cz)$ 是 R 的一个本质右理想. 显然有 $r(cz) \bigcap r(1 - cz) = 0$, 从而 $r(1 - cz) = 0$. 存在一个 $d \in Z_r(R)$ 使得 $(1 - cz)^2 = (1 - cz)(1 - cz) = 1 - d$. 由于 $d \in Z_r(R)$ 有 $0 = r(1 - d) = r((1 - cz)^2)$. 同理, 对所有正整数 n 都有 $r((1 - cz)^n) = 0$. 由于 $1 - cz \neq 0$, 由引理 6.3.1 知存在一个正整数 k 和 R 的一个子集 T 使得 $R(1 - cz)^k = l(T)$. 于是有 $R(1 - cz)^k = lr((1 - cz)^k) = R$. 从而有 $1 - cz$ 左可逆. 故 $z \in J(R)$.　　**证毕**.

定理 6.3.2　设 R 是一个右 Kasch 右 GP- 内射环. 则映射:

$$K \to r(K) \text{和} T \to l(T)$$

是 R 的所有极小左理想与 R 的所有极大右理想之间互逆的双射. 特别地,

(1) 对 R 的所有极小左理想 K, 有 $lr(K) = K$.

(2) 对 R 的所有极大右理想 T, 有 $lr(K) = K$.

证明　先证 (1) 成立. 设 K 是 R 的任意极小左理想, 则存在 $a \neq 0$ 使得 $K = Ra$. 由于 R 是右 GP- 内射环, 由引理 6.3.1 知存在一个正整数 n, 使得 Ra^n 是一个非零左零化子. 又因为 K 是极小左理想. 故 $K = Ra^n$, 从而有 $K = Ra^n = lr(Ra^n) = lr(K)$. 由于 R 是右 Kasch 环从而有每个极大右理想都是右零化子, 从而 (2) 成立.

若能证明下列两个结论, 则该定理得证.

(a) 对所有极小左理想 K, $r(K)$ 是极大右理想.

假设存在一个极大右理想 T, 使得 $r(K) \subseteq T$, 则由引理 6.3.1 知 $l(T) \subseteq lr(K) = K$. 由于 R 为右 Kasch 环, 则 $r(K) \subseteq rl(T) = T$, 即证明了 $r(K) = T$.

(b) 对所有极大右理想 $T, l(T)$ 是极小左理想.

事实上, 由于 R 是右 Kasch 环, 有 $l(T) \neq 0$. 对任意 $0 \neq a \in l(T)$, 由于 R 是右 GP- 内射环, 存在一个正整数 n, 使得 $a^n \neq 0, Ra^n$ 是一个非零化子. 从而有 $T = rl(T) \subseteq r(a^n)$. 故 $T = r(a^n)$, 从而有 $l(T) = lr(a^n) = Ra^n$. 由于 $Ra^n \subseteq Ra \subseteq l(T)$, 故 $l(T) = Ra$. 即证明了 $l(T)$ 是一个极小左理想.　　**证毕**.

引理 6.3.2 设 R 是一个右 GP- 内射环. 则

(1) 对任意 $x \in R$, 如果 xR 是一个极小右理想, 则 Rx 是一个极小左理想.

(2) $Soc(R_R) \subseteq Soc({}_RR)$.

证明 显然由 (1) 可知 (2) 成立. 下只须证 (1) 即可. 假设 xR 是一个极小右理想. 对任意 $0 \neq ax \in Rx$, 存在正整数 n 使得 $(ax)^n \neq 0$, 对任意同态 $(ax)^nR \to R$ 都可以扩张成 R 的一个自同态. 下定义 $\phi : xR \to (ax)^nR$ 使得对任意 $r \in R$, $\phi(xr) = (ax)^n r$, 显然 ϕ 是定义好的. 由于 $\phi(x) = (ax)^n \neq 0$, 故 $\phi \neq 0$, 从而 $Ker\phi \neq xR$. 由于 xR 是极小右理想, 故 $Ker\phi = 0$. 即 $\phi : xR \to (ax)^nR$ 同构. 令 $i : xR \to R$ 是包含映射. 令 $\varphi = i\phi^{-1}$, 则 φ 是一个从 $(ax)^nR$ 到 R 的同态且对任意 $r \in R$, 有

$$\varphi((ax)^n r) = xr.$$

于是存在 $y \in R$, 使得 $x = y(ax)^n = zax$, 其中 $z = y(ax)^{n-1}$, 故 $Rx = Rax$. 即证明了 Rx 是极小左理想.

定理 6.3.3 设 R 是右 Kasch 右 GP- 内射环. 则

(1) 任意 $x \in R$, 如果 Rx 是极小左理想, 则 xR 是极小右理想.

(2) $Soc({}_RR) = Soc(R_R)$ 是本质左理想.

(3) $J = r(S) = rl(J)$, 其中 $S = Soc({}_RR) = Soc(R_R)$.

(4) $l(J)$ 是本质左理想.

(5) $Z_r(R) = J = Z_l(R)$.

证明 (1) 由于 Rx 是极小左理想, 由定理 6.3.2 知 $r(x) = r(Rx)$ 是极大右理想. 故 $xR \cong R/r(x)$ 是单右 R- 模, 即 xR 是极小右理想.

(2) 由 (1) 及引理 6.3.2 知 $Soc({}_RR) = Soc(R_R)$. 对任意 $0 \neq a \in R$ 存在 n 使得 $a^n \neq 0$ 且 Ra^n 是一个左零化子. 存在一个极大右理想 T 使得 $r(a^n) \subseteq T$, 则有

$$l(T) \subseteq lr(a^n) = Ra^n \subseteq Ra,$$

由定理 6.3.2 知 $l(T)$ 是极小左理想. 故 $Soc({}_RR)$ 是本质左理想.

(3) 显然有, $J \subseteq r(S)$, 其中 $S = Soc(R_R) = Soc({}_RR)$. 设 M 是任意极大右理想. 由于 R 是右 Kasch 环, 存在 R 的一个极小右理想 L 使得 $R/M \cong L$. 如果 $x \in r(S)$, 则

$$0 = Lx = \varphi(R/M)x = \varphi((R/M)x),$$

故 $(R/M)x = 0$, 从而 $x \in M$. 即证明了 $r(S) \subseteq J$, 故 $J = r(S)$. 显然有 $J = rl(J)$.

(4) 由 (3) 知 $S \subseteq lr(S) = l(J)$, 又由 (2) 知 S 是本质左理想, 从而 $l(J)$ 是本质左理想.

(5) 由定理 6.3.1 知 $J = Z_r(R)$. 下证 $J = Z_l(R)$. 令 $x \in Z_l(R)$. 由 (3) 知 $x \in r(Soc(_RR)) = J$. 另一方面, 若 $x \in J$, 则 $l(J) \subseteq l(x)$. 又由于 $l(J)$ 是本质左理想, 于是 $l(x)$ 也是本质左理想. 故 $x \in Z_l(R)$. 即证 $J = Z_l(R)$. **证毕**.

引理 6.3.3 设 R 是右 GP- 内射环, $a, b \in R$, bR 是一个极小右理想. 如果 $bR \cong aR$, 则 $Ra \cong Rb$.

证明 由假设知存在正整数 n, 使得 $b^n \neq 0$ 且任意从 b^nR 到 R 的同态都可以提升为 R 的一个自同态. 由于 bR 是极小右理想有 $b^nR = bR$. 设 $\sigma : bR \to aR$ 是同构, 于是 σ 可以提升为 R 的自同态 τ. 令 $v = \tau(1)$. 则 $\sigma(b) = \tau(b) = vb$. 另一方面存在 $u \in R$ 使得 $\sigma(b) = au$. 对任意 $r \in R$, 定义 $\varphi : Ra \to Rb$ 为

$$\varphi(ra) = rvb.$$

用常规的方法直接验证 φ 是 R- 同构. **证毕**.

定理 6.3.4 设 R 是半完全右 GP- 内射环. 如果 $Soc(R_R)$ 是本质右理想, 则 R 是左、右 Kasch 环.

证明 由引理 6.3.2 知 $Soc(R_R) \subseteq Soc(R_R)$ 且 $Soc(_RR)$ 是本质右理想. 用文献 [107], Theorem2. 4(2) ⇒ (1) 类似的方法可得 R 是左 Kasch 环.

设 $Ra_1, \cdots, Ra_n$ 是单左 R- 模同构类得代表类. 由于 R 是半完全环, 由文献 [80], Theorem 9.3.4, 知 n 有限. 又因为 $Soc(R_R)$ 是本质右理想, 每个右理想 a_iR 包含一个可以写成 a_ib_iR 的单右理想, $I = 1, 2, \cdots, n$. 如果令 $c_i = a_ib_i$, 则 $Ra_i \cong Rc_i$, 故 $Rc_1, Rc_2, \cdots, Rc_n$ 是单左 R- 模同构类的代表集. 如果 $c_iR \cong c_jR$, 由引理 6.3.3 知 $Rc_i \cong Rc_j$, 因此 $i = j$. 于是 $c_1R, c_2R, \cdots, c_nR$ 是单右 R- 模同构类的代表集, 从而 R 是右 Kasch 环. **证毕**.

从定理 6.3.4 易得下面的推论.

推论 6.3.1 每个右 GPF- 环既是左 Kasch 环又是右 Kasch 环.

引理 6.3.4 设 M_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是极大右理想使得对任意 $k (1 \leqslant k \leqslant n)$. 如果 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i \neq \bigcap\limits_{\substack{j \neq k \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} M_j$, 则 $l\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} M_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} l(M_i)$.

证明 用数学归纳法证.

当 $n = 2$, 则 $M_1 \not\subset M_2$. 故 $M_1 + M_2 = R_R$. 设 $x \in l(M_1 \bigcap M_2)$. 定义 $\varphi : M_1 + M_2 \to R_R$ 使得

$$\varphi(b + c) = xb,$$

其中 $b \in M_1, c \in M_2$. 易证 φ 是定义好的. 由于 $M_1 + M_2 = R_R$, 所以

$$xb = \varphi(b + c) = m(b + c),$$

其中 $m=\varphi(1)$. 特别地，对任意 $b\in M_1$ 有 $xb=mb$. 对任意 $c\in M_2$ 有 $0=mc$. 于是 $x-m\in l(M_1)$ 和 $m\in l(M_2)$. 故

$$x=x-m+m\in l(M_1)+l(M_2),$$

从而有

$$l(M_1\cap M_2)\subseteq l(M_1)+l(M_2).$$

反包含是显然的. 故

$$l(M_1\cap M_2)=l(M_1)+l(M_2).$$

易证对 $n\geqslant 2$ 时结论成立. **证毕.**

定理 6.3.5 如果 R 是右 Kasch, 右 GP- 内射环且 R 是半局部环，则 ${}_RR$ 有限余生成，因此 R 是左有限维的.

证明 由于 R 是半局部环， $J=\bigcap\limits_{i=1}^{n}M_i$, 其中 M_i 是极大右理想. 不失一般性，我们假设对任意 k,

$$\bigcap_{i=1}^{n}M_i\neq\bigcap_{\substack{j\neq k\\1\leqslant j\leqslant n}}M_j, 1\leqslant k\leqslant n.$$

于是由上面引理 6.3.4 知 $l(J)=\sum\limits_{i=1}^{n}l(M_i)$. 由引理 6.3.2 知 $l(M_i)$ 是 R 的极小左理想. 故 $l(J)$ 是有限生成左理想. 又由文献 [80] (Theorem 9.3.5) 知 $Soc(R_R)=l(J)$. 由定理 6.3.3(2) 知 $Soc(R_R)=Soc({}_RR)$ 是本质左理想. 故 ${}_RR$ 是有限余生成的，因此 R 是左有限维的. **证毕.**

由定理 6.3.5 可得下面推论，该推论肯定回答了 Nicholson 和 Yousif 提出的一个问题 (文献 [107], Remark).

推论 6.3.2 如果 R 是右 P- 内射、右 Kasch 环，则当 R 是半局部环时， R 是左有限维的.

R 的极大右 (左) 零化子是一个右 (左) 零化子 M, 使得对任意包含 M 的右 (左) 零化子 N, 有 $N=M$ 或 $N=R$. 若 M 是 R 的一个极大右 (左) 零化子，则存在 $0\neq a\in R$ 使得 $M=r(a)((M=l(a))$.

定理 6.3.6 如果 R 是半素右 GP- 内射环，则 R 的每个极大右 (左) 零化子是由一个幂等元生成的 R 的极大右 (左) 理想.

证明 设 L 是一个极大右 (左) 零化子，则存在 $0\neq a\in R$ 使得 $L=r(a)(l(a))$.

首先，我们有 $(*)$ 对任意 $0\neq y\in Ra$, 有 $r(a)=r(y)$. 事实上，如果 $L=r(a)$, 则 $(*)$ 显然成立. 设 $L=l(a)$. 对任意 $0\neq y=ta\in Ra$ 显然有 $r(a)\subseteq r(y)$. 下假设

$x \notin r(a)$, 由于 $ax \neq 0$, 有 $l(a) = l(ax)$, 从而 $yx \neq 0$(因为 $y = ta \neq 0$). 于是证明了 $x \notin r(y)$, 故 $r(a) = r(y)$.

下面，我们将证明 L 是由一个幂等元生成. 设 $S = Z_r(R) \bigcap Ra$. 我们证明 $S = 0$. 假设存在 $x \in S$ 且 $x^2 \neq 0$. 于是由 $(*)$ 有 $r(a) = r(x) = r(x^2)$, 从而可证

$$xR \bigcap r(x) = 0,$$

与 $x \in Z_r(R)$ 矛盾. 故对任意 $x \in S$, 有 $x^2 = 0$. 下设 $0 \neq x, y \in S$, 由 $(*)$ 得 $r(x) = r(y) = r(a)$. 由于 $x^2 = 0$, 有 $x \in r(x) = r(y)$, 从而 $yx = 0$. 即证 $S^2 = 0$. 由于 R 是半素环故 $S = 0$. 因此 $a \notin Z_r(R)$, 即 $r(a)$ 不是 R 的本质右理想. 由文献 [62] (Proposition 1.3) 知存在 R 的一个非零右理想 I 使得 $r(a) \oplus I$ 是 R 的本质右理想. 取 $0 \neq b \in I$, 则 $ab \neq 0$. 由 R 是右 GP- 内射，故存在正整数 n 使得 $(ab)^n \neq 0$ 且任意从 $(ab)^n R$ 到 R 的右 R- 同态都可以提升为 R 的一个自同态. 由于 $bR \bigcap r(a) = 0$, 于是有一个定义好的 R- 同态 $g : (ab)^n R \to R$ 定义为对任意 $t \in R$ 有

$$g((ab)^n t) = b(ab)^{n-1} t.$$

故存在 $c \in R$, 使得 $b(ab)^{n-1} = c(ab)^n$, 于是

$$b(ab)^{n-1} \in r(a - aca).$$

另一方面，由于 $(ab)^n \neq 0$ 有 $b(ab)^{n-1} \notin r(a)$, 故

$$r(a) \subset r(a - aca).$$

又由于 $a - aca \in Ra$, 由 $(*)$ 有 $a = aca$. 令 $d = ca(ac)$, 则 $d2 = d$ 且

$$L = r(a) = r(d) = Er \qquad (L = l(a) = l(d) = Re),$$

其中 $e = 1 - d$.

下证 L 是 R 的极大右 (左) 理想，只须证 dR 是极小右理想即可. 又因为 R 是半素环，转化为证 dRd 是除环. 事实上，对任意 $0 \neq x \in dRd$, 由 R 的 GP- 内射性知存在正整数 n 使得 $x^n \neq 0$, 由 $(*)$ 有 $r(x^n) = r(d)$. 故映射 $f : x^n R \to R$ 定义为 $f(x^n t) = dt$(任意 $t \in R$) 是定义好的且可以扩张到 R, 故存在 $0 \neq y \in R$ 使得 $yx^n = d$, 从而得 $dydx^n = d$. 即证明了 dRd 是除环.　　**证毕**.

从定理 6.3.6 得下列推论.

推论 6.3.3　如果 R 是半素右 GP- 内射环，则存在 R 的一个极大右 (左) 零化子当且仅当 $Soc(R_R) = Soc({}_R R) \neq 0$.

推论 6.3.4　如果 R 是素右 GP- 内射环且存在 R 的一个极大右 (左) 零化子，则 R 是左、右本原环.

定理 6.3.7 设 R 是右 GP- 内射环，且对 R 中任意无限序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$，升链 $r(a_1) \subseteq r(a_2a_1) \subseteq r(a_3a_2a_1) \subseteq \cdots$ 稳定，则 R 是右完全环.

证明 我们先证 R/J 是 V. N. 正则环. 设 $a_1 \notin Z_r(R)$, 则 $r(a_1)$ 不是 R 的本质右理想. 由定理 6.3.6 的证明知存在 $c_1 \in R$ 使得

$$r(a_1) \subset r(a_1 - a_1c_1a_1).$$

令 $a_2 = a_1 - a_1c_1a_1$. 如果 $a_2 \in Z_r(R)$, 则在 $R/Z_r(R)$ 中有 $\bar{a}_1 = \bar{a}_1c_1\bar{a}_1$, 即 $\bar{a}_1$ 是 $R/Z_r(R)$ 的一个正则元. 如果 $a_2 \notin Z_r(R)$, 由前面的证明知存在 $c_2 \in R$使得$r(a_2) \subset r(a_3)$, 其中 $a_3 = a_2 - a_2c_2a_2$. 重复上面的过程，存在 $c_i \in R$ 得严格升链

$$r(a_1) \subset r(a_2) \subset r(a_3) \subset \cdots,$$

其中 $a_{i+1} = a_i - a_ic_ia_i$, $i = 1, 2, 3, \cdots$.

令

$$a_1 = b_1, b_2 = 1 - a_1c_1, b_3 = 1 - a_2c_2, \cdots, b_{i+1} = 1 - a_ic_i, \cdots$$

则

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2b_1, a_3 = b_3b_2b_1, \cdots, a_{i+1} = b_{i+1}b_i \cdots b_2b_1, \cdots$$

从而得严格升链

$$r(b_1) \subset r(b_2b_1) \subset r(b_3b_2b_1) \subset \cdots,$$

这与条件矛盾. 故存在正整数 n 使得 $a_{n+1} \in Z_r(R)$, 即 $a_n - a_nc_na_n \in Z_r(R)$. 即证明了 $\overline{a_n}$ 是 $R/Z_r(R)$ 的正则元，由文献 [63] 知 $\overline{a_{n-1}}, \overline{a_{n-2}}, \cdots \overline{a_1}$ 都是 $R/Z_r(R)$ 的正则元. 故 $R/Z_r(R)$ 的每个元素都是正则元即证 $R/Z_r(R)$ 是 V. N. 正则环. 又由定理 6.3.1 知 $J = Z_r(R)$. 因此 R/J 是 V. N. 正则环.

对 J 中的每个序列 $a_2, a_1, \cdots$, 由于有

$$r(a_1) \subseteq r(a_2a_1) \subseteq r(a_3a_2a_1) \subseteq \cdots,$$

由条件知存在 n 使得

$$r(a_na_{n-1} \cdots a_1) = r(a_{n+1}a_n \cdots a_1).$$

从而有

$$(a_na_{n-1} \cdots a_1)R \cap r(a_{n+1}) = 0.$$

由于 $a_{n+1} \in J = Z_r(R)$, 有 $r(a_{n+1})$ 是 R 的本质右理想. 从而有

$$a_na_{n-1} \cdots a_1 = 0,$$

即证 J 是右 T- 幂零的. 当然, J 也是诣零的.

设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n, \cdots$ 是 R/J 中非零正交幂等元可数无限集. 由文献 [80] (Theorem 11.5.3) 知存在 R 的非零正交幂等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$ 使得 $\varepsilon_i = \overline{e_i}$, $i = 1, 2 \cdots$.

令 $a_i = 1 - (e_1 + e_2 + \cdots + e_i)$, $i = 1, 2, \cdots$. 则易见

$$a_{i+1} = a_i - a_i e_{i+1} a_i, a_{i+1} e_{i+1} = 0 \text{并且} a_i e_{i+1} = e_{i+1} \neq 0.$$

从而有

$$r(a_i) \subset r(a_{i+1}), \quad i = 1, 2, \cdots$$

令

$$b_i = 1 - e_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

则 $a_i = b_i b_{i-1} \cdots b_1$, 故

$$r(b_i b_{i-1} \cdots b_1) \subset r(b_{i+1} b_i \cdots b_1), \quad i = 1, 2, \cdots$$

于是得下列严格升链

$$r(b_1) \subset r(b_2 b_1) \subset r(b_3 b_2 b_1) \subset \cdots$$

与条件矛盾. 故 R/J 不包含非零正交幂等元无限集, 由文献 [63] (Corollary2.16) 知 R/J 是半单 Artinian 环, 从而知 R 是右完全环. **证毕**.

推论 6.3.5 设 R 是右 GP- 内射环. 则下列条件等价:

(1) R 是右完全环;

(2) 每个平坦右 R- 模有限投射;

(3) 每个平坦右 R- 模 singly 投射;

(4) 对 R 的每个无限序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 升链 $r(a_1) \subseteq r(a_2 a_1) \subseteq r(a_3 a_2 a_1) \subseteq \cdots$ 稳定.

证明 (1) ⇒ (2) ⇒ (3) 显然成立. 由文献 [15] (Corollary 25) 知 (3) ⇒ (4) 成立. 由定理 6.3.7 知 (4) ⇒ (1) 成立.

注记 Azumaya 在文献 [15] (Remark) 中猜测每个平坦右 R- 模有限投射当且仅当对 R 的每个无限序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 升链

$$r(a_1) \subseteq r(a_2 a_1) \subseteq r(a_3 a_2 a_1) \subseteq \cdots$$

稳定. S. Zhu [181] 对这个猜测的回答是否定的. 但推论 6.3.4 在右 GP- 内射环的条件下对这个猜测给出了肯定回答.

定理 6.3.8 设 R 是半素右 GP- 内射环, 如果对 R 中的任意无限序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 升链 $r(a_1) \subseteq r(a_2 a_1) \subseteq r(a_3 a_2 a_1) \subseteq \cdots$ 稳定, 则 R 是半单 Artin 环.

证明 由推论 6.3.4 知 $Z(R_R) = J$ 是右 T- 幂零从而是诣零理想.

下面，我们将证明如果 $Z_r(R) \neq 0$, 则存在 $0 \neq b \in Z_r(R)$ 使得

(**) 对任意 $0 \neq y \in Rb$ 有 $r(b) = r(y)$.

若不然，对任意 $0 \neq a_1 \in Z_r(R)$, 存在 $a_2 \in R$ 使得 $a_2a_1 \neq 0$ 但有 $r(a_1) \subset r(a_2a_1)$. 由于 $0 \neq a_2a_1 \in Z_r(R)$, 存在 $a_3 \in R$ 使得 $a_3a_2a_1 \neq 0$, 但有 $r(a_2a_1) \subset r(a_3a_2a_1)$. 重复该过程，得严格升链

$$r(a_1) \subset r(a_2a_1) \subset r(a_3a_2a_1) \subset \cdots$$

其中 $a_i \in R$, $i = 1, 2, 3, \cdots$. 与条件矛盾. 从而 (**) 成立.

假设 $Z_r(R) \neq 0$. 则存在 $0 \neq b \in Z_r(R)$ 使得 (**) 成立. 由于 R 是半素环，存在 $c \in R$ 使得 $bcb \neq 0$. 由 (**) 知 $r(b) = (bcb)$. 注意到 $bc \neq 0$, 故 $c \notin r(b) = r(bcb)$, 有 $(bc)^2 \neq 0$. 于是有 $cbc \notin r(b)$, 从而 $(bc)^3 \neq 0$. 如此继续下去对每个正整数 n 都有 $(bc)^n \neq 0$, 即 bc 不是幂零元，与定理 6.3.7 矛盾. 故 $Z_r(R) = 0$. 即证 R 是半单 Aritin 环. **证毕.**

Rutter[130] 在 P- 内射的情况下证明了下列结果.

定理 6.3.9 设 R 是右 GP- 内射环且满足右零化子升链条件. 则

(1) R 是左 Aritin 环.

(2) R 是右 Aritin 环当且仅当 $Soc(RR)$ 是有限生成右理想.

证明 (1) 由定理 6.3.7 知 R/J 是半单 Aritin 环且 J 是右 T- 幂零. 由文献 [2] (Proposition 29.1) 知， J 是幂零理想. 于是 R 是半准素环，由定理 6.3.4 知 R 是左、右 Kasch 环. 由定理 6.3.3 和定理 6.3.5 知 $Soc({}_RR) = Soc(R_R)$ 有限生成左理想. 由文献 [41] (Lemma 6) 知， R 是左 Aritin 环.

(2) 假设 $Soc(R_R)$ 是有限生成右理想. 由 (1) 知， R 是左 Aritin 环，从而 R 满足左零化子升链条件. 由文献 [41] (Lemma 6) 知， R 是右 Aritin 环. **证毕.**

由定理 6.3.9 得下列推论.

推论 6.3.6 如果 R 是右 GP- 内射右 Noether 环，则 R 是左、右 Aritin 环.

下面的结果推广了文献 [107] (Theorem 2.2).

定理 6.3.10 如果 R 是右 GP- 内射且 $R/Soc(R_R)$ (或 $R/Soc({}_RR)$) 满足右零化子升链条件，则 J 是幂零理想.

证明 我们用与文献 [4] (Theorem 3) 类似的方法证明. 假设 $R/Soc(R_R)$ 对右零化子满足 ACC 条件. 令 $S = Soc(R_R)$, $\overline{R} = R/S$. 对 J 中的任意序列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$, 有升链

$$r_{\overline{R}}(\overline{a_1}) \subseteq r_{\overline{R}}(\overline{a_2}\,\overline{a_1}) \subseteq r_{\overline{R}}(\overline{a_3}\,\overline{a_2}\,\overline{a_1}) \subseteq \cdots,$$

由假设，存在正整数 m 使得

$$r_{\overline{R}}(\overline{a_m} \cdots \overline{a_2}\,\overline{a_1}) = r_{\overline{R}}(\overline{a_{m+k}} \cdots \overline{a_m} \cdots \overline{a_2}\,\overline{a_1}), \quad k = 1, 2, \cdots.$$

对任意正整数 n, 由于 $a_{n+1}a_n\cdots a_1\in J=Z_r(R)$, 于是 $r(a_{n+1}a_n\cdots a_1)$ 是 R 的本质右理想. 故 $S\subseteq r(a_{n+1}a_n\cdots a_1)$.

下证 $r_{\overline{R}}(\overline{a_n}\cdots\overline{a_1})\subseteq r(a_{n+1}a_n\cdots a_1)/S\subseteq r_{\overline{R}}(\overline{a_{n+1}}\,\overline{a}_n\cdots\overline{a}_1)$. 事实上, 对任意 $b+S\in r_{\overline{R}}(\overline{a_n}\cdots\overline{a_1})$. 于是有 $a_n\cdots a_1b\in S$. 因为 $S\subseteq r(a_{n+1})$, 得

$$a_{n+1}a_n\cdots a_1b=0.$$

于是 $b\in r(a_{n+1}a_n\cdots a_1)$, 故 $b+S\in r(a_{n+1}a_n\cdots a_1)/S$. 而

$$r(a_{n+1}a_n\cdots a_1)/S\subseteq r_{\overline{R}}(\overline{a_{n+1}}\,\overline{a_n}\cdots\overline{a_1})$$

是显然的.

由于 $r_{\overline{R}}(\overline{a_m}\cdots\overline{a_1})=r_{\overline{R}}(\overline{a_{m+2}}\,\overline{a_{m+1}}\,\overline{a_m}\cdots\overline{a_1})$, 由上面的包含式知

$$r(a_{m+1}a_m\cdots a_1)/S=r(a_{m+2}a_{m+1}\cdots a_1)/S,$$

从而有

$$r(a_{m+1}a_m\cdots a_1)=r(a_{m+2}a_{m+1}\cdots a_1),$$

于是有 $(a_{m+1}a_m\cdots a_1)R\bigcap r(a_{m+2})=0$. 又由于 $r(a_{m+2})$ 是本质右理想, 有

$$a_{m+1}a_m\cdots a_1=0.$$

因此 J 是右 T- 幂零理想且环 $\overline{R}=R/S$ 的理想 $(J+S)/S$ 也是右 T- 幂零的. 由文献 [2] (Proposition 29.1) 知 $(J+S)/S$ 是幂零的, 故存在一个正整数 t 使得 $J^t\subseteq S$. 于是有 $J^{t+1}\subseteq SJ=0$, 从而 J 是幂零理想. **证毕.**

由条件 $Soc(_RR)\subseteq r(J)\subseteq r(a)$, 我们同理可证其余的情况.

§6.4 sim- 自内射环

日本环论学者 M. Harada 于 1982 年首次引入了环与模的 sim- 内射性.

定义 6.4.1 环 R 称为右 sim- 内射, 如果对 R 的任意右理想 I 及 R- 同态 $\gamma: I\to R$ 且 $\mathrm{Im}\gamma$ 是单右理想, γ 都可以表示为 R 的某个元的左乘变换, 即存在 $c\in R$ 使得 $\gamma=c\cdot$.

定义 6.4.2 R 是半完全环, E 是本原幂等元的一个基本集, 如果 $e,f\in E$, 称 (eR,Rf) 是一个 i- 对 (i-pair) 如果 $Soc(eR)\cong fR/fJ$, $Soc(Rf)\cong Re/Je$. 其中 J 表示环 R 的 Jacobson 根.

命题 6.4.1 设 R 是半完全环, $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 R 的一个本原幂等元基集. 如果 R 是右 sim- 内射且 $Soc(R_R)\subseteq_e R_R$, 则存在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个 (Nakayama) 置换 σ 使得 $(e_kR,Re_{\sigma k})$ 是一个 i- 对, $k=1,2,\cdots,n$.

证明 我们把证明分成几步来证.

论断 1 R 是右 Kasch 环. 对每个 i 取一个单右理想 $K_i \subseteq e_iR$. 只须证 K_i 是单右 R- 模集的一个代表元即可. 由于 e_i 是基, 我们证明若 $K_i \cong K_j$ 则 $e_iR \cong e_jR$. 如果 $\sigma : K_i \to K_j$ 是一个同构, 由于 R 是右 sim- 内射, 存在 $a \in R$ 使得 $\sigma = a\cdot$. 如果 $\sigma^{-1} = kR$, 则 $bak = k$. 从而有 $a \notin J$. 由于可以假设 $a \in e_jRe_i$, 于是有 $a\cdot : e_iR \to e_jR$ 同构, 即证论断 1 .

论断 2 对 R 的每个右理想 I 有 $rl(I) = I$. 如果 $b \in rl(I)$, $b \notin I$, 设 M/I 是 $(bR+I)/I$ 的一个极大子模. 如果 $\delta : (bR+I)/M \to R_R$ 是嵌入映射 (由论断 1), 定义 $\gamma : (bR+I) \to R$ 为 $\gamma(x) = \delta(x+M)$. 则存在 $c \in R$ 使得 $\gamma = c\cdot$. 于是 $cI = \gamma(I) = 0$, 由于 $b \in rl(I)$ 有 $cb = 0$. 但 $cb = \delta(b+M) \neq 0$ 矛盾, 故论断 2 成立.

特别地, 由于对任意 $a \in R$ 有 $rl(a) = aR$, 故 R 是左 P- 内射. 为方便, 记 $S_r = Soc(R_R)$, $S_l = Soc({}_RR)$.

论断 3 $S_r \subseteq_e ({}_RR)$, 特别地, $S_l \subseteq S_r$. 设 $0 \neq b \in R$. 由论断 2 , 设 $\gamma : bR \to R_R$ 有单同态像. 则存在 $c \in R$ 使得 $\gamma = c\cdot$, 于是 $cb = \gamma(b) \neq 0$, 而 $cbJ \subseteq \gamma(bR)J = 0$. 于是 $0 \neq cb \in Rb \cap l(J)$. 由于 $l(J) = S_r(R/J$ 是半单环), 即证论断.

论断 4 如果 kR 是单右理想, $k \in R$, 则 $Rk = lr(k)$ 是单左理想. 特别地, $S_l = S_r$. 设 kR 是单右理想, $k \in R$. 如果 $0 \neq a \in Rk$, 则 $r(k) \subseteq r(a)$. 由于 $r(k)$ 是极大的, 有 $r(k) = r(a)$. 故 $k \in lr(k) = lr(a)$. 只须证 $lr(a) \subseteq Ra$ 即可. 又由于 $b \in lr(a)$, 则 $\gamma : aR \to R$ 定义为 $\gamma(ar) = br$ 是定义好的. 又由于 aR 是单右理想, 存在 $c \in R$ 使得 $\gamma = c\cdot$, 故 $b = \gamma(a) = ca \in Ra$, 即证论断 4.

由论断 3 和论断 4 知, S_l 是本质左理想, 又由于 R 是半完全左 P- 内射环, 故 R 是左 GPF- 环.

论断 5 如果 Rk 是单左理想, $k \in R$. 则 kR 是单右理想. 如果 Rk 是单左理想, 由论断 4 知, $kR \subseteq S_r$, 设 $mR \subseteq kR$, 其中 mR 是单的, 则有 $l(k) \subseteq l(m)$. 由于 $l(k)$ 是极大的, 有 $l(k) = l(m)$. 由论断 2 知 $kR = mR$, 即证明了论断 5.

论断 6 对每个本原幂等元 $e \in R$ 有 $Soc(Re)$ 是单的. 由论断 3 和论断 4 知 $S_l \subseteq_e ({}_RR)$, 设 $Rk \subseteq Soc(Re)$, 其中 Rk 是单左理想. 由论断 5 知

$$(l-e)R + J \subseteq r(k).$$

但 $(l-e)R + J$ 是极大右理想 (e 是局部的), 于是 $r(k) = (l-e)R + J$. 由论断 4 有

$$Rk = lr(k) = Re \bigcap l(J) = Re \bigcap S_r = Soc(Re).$$

即证明了论断 6 .

由于 R 是左 GPF- 环, 由文献 [107] (Theorem 2.3) 和论断 6 知, 存在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个置换 σ 使得对每个 k 都有 $Soc(e_kR)\cong e_{\sigma k}R/e_{\sigma k}J$ 和 $Soc(Re_{\sigma k})\cong Re_k/Je_k$. 因此 $(e_kR, Re_{\sigma k})$ 是一个 i- 对, $k=1,2,\cdots,n$. **证毕**.

下面的命题是文献 [25] (Proposition 2) 的一个结果.

命题 6.4.2　设 R 是半准素环, 则 R 是右自内射当且仅当 R 是右 sim- 内射.

证明　如果 R 是右 sim- 内射, 易证对所有的本原幂等元 e 和 g 有 eR 是单 -gR- 内射. 由命题 6.4.1 和文献 [25] (Proposition 2) 知, 每个 eR 是内射的, 故 R_R 内射. **证毕**.

当 R 是左完全环时, 有 $S_r \subseteq_e$. 因此下面的结果是 W. K. Nicholson and M. F. Yousif 在 1997 年推广了 Osofsky[115] 的一个定理即左完全双边自内射环是 QF- 环.

命题 6.4.3　R 是左完全, 左、右 sim- 内射环, 则 R 是 QF- 环.

证明　由命题 6.4.1 的证明知, R 是左 GPF- 环并且对 R 的任意右理想 I 有 $rl(I)=I$, 因此 $Soc({}_RR)=Soc(R_R)\subseteq_e ({}_RR)$. 由 R 的对称性, 对 R 的每个左理想 L 有 $lr(L)=L$. 由于文献 [69] (Theorem) 证明了每个主左或右 R- 模有有限的 uniform 维数. 由于 R 是右半 Aritin 环 (R 是左完全环), 由文献 [19] (定理 5.3) 知 R 是右 Artin 环. 特别地, R 是半准素环. 于是由命题 6.4.2 知 R 是左、右自 - 内射环. 故 R 是 QF- 环. **证毕**.

下面命题 6.4.4 最先的证明很长且用了集合论的技巧. 我们要感谢 K. Fuller 教授, 他给出了下面的证明.

命题 6.4.4　R 是半完全右 sim- 内射环且 $Soc(R_R)\subseteq_e$. 对 $n\geqslant 2$, 如果 $Soc_n(R)$ 是可数 (countably) 生成左 R- 模, 则 J^{n-1}/J^n 是有限生成右 R- 模.

证明　由命题 6.4.1 的论断 3 和论断 4 有 $S_r=S_l\subseteq_e ({}_RR)$. 记 $S=S_r=S_l$. 由于 R/J 半单, 有 $S=l(J)=r(J)$.

论断 7　对任意 $n\geqslant 1$, $Soc_n(R_R)=Soc_n({}_RR)=l(J^n)=r(J^n)$.

假设 $Soc_k(R_R)=Soc_k({}_RR)=l(J^k)=r(J^k)$. 由于 $Soc_{k+1}(R_R)/Soc_k(R)$ 是右 R- 半单的, 我们有

$$Soc_{k+1}(R_R)\subseteq l(J^{k+1}).$$

另一方面, 如果 $aJ^{k+1}=0$, 则 $aJ\subseteq Soc_k(R)$ 故 $[aR+Soc_k(R)]/Soc_k(R)$ 是右 R- 半单 (由于 R/J 半单). 于是 $aR\subseteq Soc_{k+1}(R_R)$, 从而有 $Soc_{k+1}(R_R)=l(J^{k+1})$. 同理, $Soc_{k+1}({}_RR)=r(J^{k+1})$. 由假设 $l(J^k)=r(J^k)$ 知 $l(J^{k+1})=r(J^{k+1})$. 该论断得到了证明.

下面我们证明: 如果 I 是 R 的右理想, 每个像半单的 R- 同态 $\varphi: I\to R$ 都可以表示为 R 的某个元的左乘变换. 事实上, 由命题 6.4.1 知 R 是右有限维的, 从而有 $\varphi(I)=\oplus_{i=1}^n S_i$($S_i$ 是 R 的单右理想). 设 $\pi_i:\bigoplus_{i=1}^n S_i\to S_i$ 是投射, 令 $\varphi_i=\pi_i\circ\varphi$.

由于 R 是右 sim- 内射，存在 $t_i \in R$ 使得 $\varphi_i(a) = t_i a (a \in R)$. 如果 $t = \sum_{i=1}^{n} t_i$, 则 $\varphi(a) = ta(a \in I)$.

对任意 $n \geqslant 2$, 可以直接证得

$$Hom_R(J^{n-1}/J^n, R_R) \cong l_R(J^n)/l_R(J^{n-1}).$$

由此可证 J^{n-1}/J^n 是有限生成右 R- 模. 若不然，由于 R 有有限个单右 R- 模同构类，令是 $S^{(N)}$ 是 J^{n-1}/J^n 的直和项，其中 S 是单右 R- 模，$S^{(N)}$ 表示 S 的可数直和. 由于 R 是右 sim- 内射和 (由命题 6.7.1) 右 Kasch 环，${}_RT = Hom_R(S, R_R)$ 是单左 R- 模. 于是

$$T^N = Hom_R(S,R)^N \cong Hom_R(S^{(N)}, R) \mapsto Soc_n(R)/Soc_{n-1}(R).$$

作为直和项，其中 T^N 是可数个 T 的直积. 又由于 T^N 的维数 $|T|^{|N|} > |N|$, 由 Erdös 和 Kaplansky (参看文献 [27]276 页) 知矛盾. 从而结论成立. **证毕.**

下面的定理推广了许多关于自内射环最近的结果.

定理 6.4.1 R 是左完全右 sim- 内射环. 则 R 是 QF- 环当且仅当 $Soc_2(R)$ 是可数生成左 R- 模.

证明 由命题 6.4.4 及其证明知 $Soc_2(R_R) = Soc_2({}_RR)$ 且 J/J^2 是有限生成右 R- 模. 于是由 Osofsky 的定理 [115] 知 R 是右 Artin 环. 又由命题 6.4.2 知 R 是右自内射环. 故 R 是 QF- 环. **证毕.**

推论 6.4.1 R 是左完全右自内射环. 则 R 是 QF- 环当且仅当 $Soc_2(R)$ 是可数生成左 R- 模.

注记 类似的讨论得下列结果:

(1) 如果 R 是半完全，右 sim- 内射环且 $Soc(R_R) \subseteq_e (R_R)$, 若 J/J^2 是可数生成左 R- 模，则 $Soc_2(R)$ 是有限生成右 R- 模.

(2) 如果 R 是左完全，右自内射环，若 J/J^2 是可数生成左 R- 模，则 $Soc_2(R)$ 是有限生成右 R- 模.

(3) 如果 R 是左右完全右自内射环, 若 J/J^2 是可数生成左 R- 模, 则 R 是 QF-环.

§6.5 min- 自内射环

环 R 称为 **min- 内射**[109] 如果任意一个从极小右理想 aR 到 R 的 R- 同态都可以扩张成一个 R 到 R 的 R- 同态. Harada 在 [66] 中最先引入了 min- 内射性的概念. 对任意极小右理想 aR, 有 $(aR)^2 = 0$ 或者 $aR = eR$(e 是幂等元). 于是有: 右 GP- 内射环一定是右 min- 内射环. 反之，一般不成立. 因为 $S_r = 0$ 的环 R 都是右 min- 内射环，但不一定是右 GP- 内射环 (例如，整数环 Z).

在文献 [107] 中 W.K.Nicholson 和 M.F.Yousif 广泛地研究了这些环, 并且得到了许多有趣结果.

引理 6.5.1　下列条件等价:

(1) R 是右 min- 内射;

(2) 对任意单右 R- 模 M_R 有 $M^* = Hom_R(M, R)$ 是单左 R- 模或 0 ;

(3) 对任意极大右理想 T 有 $l(T)$ 是单或 0 ;

(4) 对任意单右理想 kR 有 $lr(k) = Rk$;

(5) 如果 kR 是单且 $r(k) \subseteq r(a), k, a \in R$, 则 $Ra \subseteq Rk$.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 设 M_R 是单模. 如果 $M^* = 0$, 则结论成立. 若不然, 对任意 $0 \neq \delta \in M^*$, 有 $\delta : M \to \delta(M)$ 是同构. 对任意 $\gamma \in M^*$ 有

$$\delta(M) \xrightarrow{\delta^{-1}} M \xrightarrow{\gamma} R.$$

由 R 是 min- 内射, 存在 $a \in R$ 使得 $\gamma \circ \delta^{-1} = a\cdot$. 即证 $\gamma = a\delta \in R\delta$. 故 (2) 成立.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由于对任意右理想 T 都有 $l(T) \cong (R/T)^*$. 故 (3) 成立.

(3) $\Rightarrow$ (4). 如果 $kR \subseteq R$ 是单右理想, 则 $T = r(k)$ 是极大的且 $Rk \subseteq lr(k) = l(T)$.

(4) $\Rightarrow$ (5). 由于 $r(k) \subseteq r(a)$, 由 (4) 知 $Ra \subseteq lr(a) \subseteq lr(k) = Rk$.

(5) $\Rightarrow$ (1). 设 $\gamma : kR \to R$ 是右 R- 同态, 其中 kR 是单右理想. 令 $a = \gamma(k)$ 则有 $r(k) \subseteq r(a)$. 由 (5) 知存在 $c \in R$ 使得 $a = ck$. 即 $\gamma = c\cdot$. 即证 (1).　**证毕.**

引理 6.5.2　设 R 是右 min- 内射环, 有下列命题:

(1) 如果 kR 是单右理想, 其中 $k \in R$, 则 Rk 也是单左理想;

(2) 如果 $kR \cong mR$ 是单右理想, 则 $Rk \cong Rm$; 事实上存在 $u \in R$ 使得 $Rk = (Rm)u$;

(3) $Soc(R_R) \subseteq Soc(_RR)$;

(4) 设 e 和 f 是 R 的局部幂等元, 如果 eR 和 fR 包含同构的单右理想, 则 $eR \cong fR$.

证明　(1) 如果 $0 \neq ak \in Rk$, 定义 $\gamma = a\cdot : kR \to akR$. 则 γ 是一个同构. 由于 R 是右 min- 内射, 存在 $c \in R$ 使得 $\gamma^{-1} = c\cdot$. 于是

$$k = \gamma^{-1}(ak)cak \in Rak.$$

从而 (1) 得证.

(2) 如果 $\sigma : kR \to mR$ 是同构, 则存在 $u \in R$ 使得 $\sigma(k) = mu$. 显然有 $muR = mR$ 是单的, 且

$$r(mu) = r[\sigma(k)] = r(k).$$

(3) 由 (1) 知.

(4) 设 $\alpha: K \to fR$ 是单同态，其中 $K \subseteq eR$ 是单右理想. 由于 R 是右 min- 内射，存在 $a \in R$ 使得 $\alpha = a\cdot$, 不仿假设 $a \in fRe$. 于是 $a\cdot : eR \to fR$ 是 R- 线性. 由 (3) 有 $Soc(R_R) \subseteq Soc({}_RR)$, 故

$$0 \neq \alpha(K) = aK \subseteq aSoc(R_R) \subseteq aSoc(R_R).$$

于是 $a \notin J$, 从而 $aeR = aR \not\subset fJ$. 由于 f 是局部幂等元，故 $a\cdot$ 是一个满同态. 又因为 fR 投射， eR 不可分，故 $a\cdot$ 是同构. **证毕.**

定理 6.5.1 每个右 Aritin, 左右 min- 内射环是 QF- 环.

证明 由引理 6.5.2 知 $Soc(R_R) = Soc({}_RR)(= S)$. 由文献 [2] (Corollary 31.8), 只须证对任意局部幂等元 $e \in R$, $Soc(eR) = eS$, $Soc(Re) = Se$ 都是单的. 由于 R 是半准素环，所以 S 既是本质右理想又是本质左理想. 特别地，对每个局部幂等元 e 有 $Soc(eR) = eS$, $Soc(Re) = Se$. 故 R 是右、左 minfull, 因此 eS 和 Se 都是单的，从而 R 为 QF- 环. **证毕.**

§6.6 HN- 内射环性

定义 6.6.1 环 R 称为右 (左)***HN*-内射** 如果每个像为有限生成的从右 (左) 理想 I 到 R 的 R- 同态都能扩张成一个 R 到 R 的 R- 同态.

这个概念是 C.R.Hajarnavis 和 N.C.Norton 在 1985 年引入的. 1996 年, D. Herbera 和 A.Shamsuddin 称此条件为 HN- 条件，为了本章叙述的统一性，我们称此为 HN- 内射.

命题 6.6.1 任意 D- 环 R 为右 (左)HN- 内射.

证明 设 $x \in R$, $\lambda : xR \to R$ 是 R- 同态，任意 $y \in r(x)$, 有 $xy = 0$. 于是 $0 = \lambda(xy) = \lambda(x)y$, 从而 $y \in r(\lambda(x))$. 即证明了 $r(x) \subseteq r(\lambda(x))$. 于是有 $\lambda(x) \in lr(\lambda(x)) \subseteq lr(x) = Rx$ 从而存在 $z \in R$ 使得 $\lambda(x) = zx$. 故 λ 就是一个左乘变换.

假设 $\mu : I_1 + I_2 \to R$ 是一个 R- 同态使得 $\mu|_{I_1} : I_1 \to R$, $\mu|_{I_2} : I_2 \to R$ 分别是由 z_1, z_2 左乘的左乘变换. 任意 $x \in I_1 \cap I_2$, 有 $z_1x = \mu(x) = z_2x$, 从而有 $z_1 - z_2 \in l(I_1 \cap I_2) = l(I_1) + l(I_2)$. 于是分别存在 $y_1 \in l(I_1)$, $y_2 \in l(I_2)$ 使得 $z_1 - z_2 = y_1 + y_2$. 任意 $a_1 \in I_1, a_2 \in I_2$, 有 $y_1a_1 = y_2a_2 = 0$. 于是 $\mu(a_1 + a_2) = \mu(a_1) + \mu(a_2) = (z_1 - y_1)a_1 + (z_2 + y_2)a_2$. 又由于 $z_1 - z_2 = y_1 + y_2$, 从而有 $z_1 - y_1 = z_2 + y_2$. 从而 $\mu(a_1 + a_2) = (z_1 - y_1)(a_1 + a_2)$. 故 $\mu : I_1 + I_2 \to R$ 也是一个左乘变换.

假设 I 是 R 的一个右理想且 $f : I \to R$ 是一个像有限生成的 R- 同态. 令 $K = \ker f$. 由于 $I/K \cong f(I)$ 有限生成. 故存在 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ 使得 $I = x_1R + \cdots x_nR + K$. 显然 $f|_K$ 是由 0 左乘的左乘变换. 用数学归纳法及前两部分的证明知 f 是一个左乘变换. **证毕.**

由命题 6.6.1 的证明，我们可以得下面的推论：

推论 6.6.1　设 R 是一个满足下列两个条件的环：

(1) 任意 $x \in R$ 有 $lr(x) = Rx$.

(2) 对每对右理想 A 和 B 有 $l(A \bigcap B) = l(A) + l(B)$.

则 R 是右 HN- 内射环.

在给出主要定理之前，我们给出下面几个命题.

命题 6.6.2　R 是半局部环，M_R 是维数 $\aleph \geqslant \aleph_0$ 的半单模. 假设对任意单右 R- 模 S, $S^* = Hom_R(S, R) \neq 0$. 则 $M^* = Hom_R(M, R) \neq 0$ 是维数大于 $\aleph$ 的半单模.

证明　假设 $M = \bigoplus_{i \in I} S_i$, 其中 S_i 是单模. 则 $M^* \cong \Pi_{i \in I} S^*$. 由于 R 是半局部环，对每个 i 都有 $S_i^* \neq 0$, 存在一个单模 A 使得 A^I 嵌入 M^*. 又由于 A^I 是半单模，有 $A^I \cong A^{(J)}$, 从而 $|J| > |I| = \aleph$.　**证毕.**

命题 6.6.3　R 是右 HN- 内射环且 $Soc(R_R)$ 有限生成. 如果 $K \subset I$ 是一对右理想使得 I/K 半单，则

$$l(K)/l(I) \cong Hom_R(I/K, R).$$

证明　设 $\varphi : l(K)/l(I) \to Hom_R(I/J, R)$ 是自然映射定义为

$$\varphi(r + l(I))(x + K) = rx, \quad r \in l(K),\ x \in I.$$

φ 显然是单射. 下证 φ 是满同态，任意 $f \in Hom_R(I/K, R)$ 有 Imf 是 $Soc(R_R)$ 的直和项，故有限生成. 设 $\pi : I \longrightarrow I/K$ 是自然同态，由假设知 $f \circ \pi : I \longrightarrow R$ 可以表示为 $r \in R$ 的左乘变换. 故对任意 $x \in I$, $f(x + K) = rx$. 易证 $r \in l(K)$ 和 $\varphi(r + l(I)) = f$. 故 φ 是同构.　**证毕.**

命题 6.6.4　设 M 是右完全环 R 上的一个右 R- 模. 如果 M 的每个商模都有有限的 Goldie 维数，则 M 是 Noether 模.

证明　由文献 [29] 知对 M 的每个子模 N, 存在 N 的有限生成子模 T 使得 N/T 无极大子模. 而这对于右完全环上的非零右模是不可能的 (见文献 [47]). 故 $N = T$ 有限生成.　**证毕.**

定理 6.6.1　R 是右自内射左右完全环，如果 R 也是左 HN- 内射环. 则 R 是 QF- 环.

证明　只须证 R 是右 Noether 即可. 由于 R 是右完全环. 由命题 6.6.4 知，只须证对 R 的每个右理想 K, R/K 有限 Goldie 维数即可. 由于 R 是左完全环，只须证 $Soc(R/K) = I/K$. 由命题 6.6.2 和命题 6.6.3 知 $l(K)/l(I)$ 的维数大于 $\aleph$. 由于 R 是左 HN- 内射环，又由于 R 是右自内射右完全环，于是 $Soc(_RR)$ 有限生成. 故我们可以由命题 6.6.2 和命题 6.6.3 左的情形得 $rl(I)/rl(K) = I/K$(由于 R 是右

完全右自内射环，有每个右理想都是右零化子) 的维数大于 $l(K)/l(I)$ 的维数. 矛盾. **证毕.**

由定理 6.6.1 及推论 6.6.1 左的情形易得下面的推论.

推论 6.6.2 R 是右自内射左右完全环. 如果对每对左理想 A 和 B 都有 $r(A\bigcap B)=r(A)+r(B)$. 则 R 是 QF- 环.

1985 年, C.R.Hajarnavis 和 N.C.Norton 说明了 HN- 内射环是自内射环的真正推广 (文献 [69], 例 6.1). 到目前为止，我们没有发现关于 HN- 内射环进一步的讨论.

§6.7 max- 内射性

自内射环的研究极大地丰富了环论的内容，正如我们在前面几节所论述的那样，已有大量的关于自内射环结构的文献. 在本章的最后两节，总结了我们近年来在这方面所做的一些工作. 这方面的工作有：极大内射性、 FGT- 内射性和 CT- 内射性.

定义 6.7.1 (1) 称右 R- 模 E 为极大内射模，如果对 R 的每一个极大理想 m, 任意右 R- 模同态 $f:m\to E$ 都能扩张成 R- 同态 $f':R\to E$. (2) 称环 R 为右极大内射环，如果右正则模 R_R 极大内射.

显然，任意内射模都极大内射. 现在我们将构造一个例子以说明极大性内射性是内射性的真推广.

例 6.7.1 设 R 为 n- 维正则局部环 ($n\geqslant 2$), 其惟一的极大理想为 $m=(x_1,\cdots,x_n)$. 则：

(1) R 不是自内射环.

(2) 可逆理想 $m^{-1}:=\{k\in K|km\subseteq R\}=R$, 其中 K 为 R 的商域.

(3) R 为极内射环.

证明 (1) 因为 $n>1$, 所以 R 的内射包 $E(R)=K$. 由此可得 R 不是自内射环.

(2) 由著名的 Auslander-Buchsbaum-Nagata 定理，我们知道 R 是惟一因子分解环. 又由假设知最大公因子 $\gcd(x_1,\cdots,x_n)=1$, 由此可得 m 的逆理想

$$m^{-1}:=\{k\in K|km\subset R\}=R.$$

(3) 令 $f:m\to R$ 为任意 R- 同态，并考虑下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} m & \to & R \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ R & \to & K \end{array}$$

因为 K 为 R 的商域，它作为 R- 模是内射模．故存在 R- 同态 $g: R \to K$ 使得 $g(x) = f(x)$ 对任意 $x \in m$ 成立．我们将证明 $\mathrm{Im}(g) \subseteq R$, 从而 g 是 f 的扩张．为此令 $g(1) = y \in K$, 则 $f(x) = g(x) = xg(1) = xy \in R$ 对任意 $x \in m$ 成立．由此可得 $y \in m^{-1} = \{k \in K | km \subseteq R\} = R$.　　**证毕**.

由定义不难得到下列结论．

命题 6.7.1　设 R 为任意环，E 为任意右 R- 模．则以下条件等价：

(1) E 极大内射；

(2) 对每个极大右理想 $m \leqslant R_R$, 及任意右 R- 同态 $f: m \to E$, 存在 $e \in E$ 使得 $f(x) = ex$ 对任意 $x \in m$ 成立．

(3) $Ext_R^1(R/m, E) = 0$ 对每个极大右理想 $m \leqslant R_R$ 成立．

我们知道内射模的直和一般不一定内射．实际上，环 R 上内射模的直和内射当且仅当 R 为 Noether 环，并且在 Noether 环上循环模有限表现．关于极大内射，有下列结论．

命题 6.7.2　对任意环 R 以下条件等价：

(1) 极大内射右 R- 模的直和仍然极大内射；

(2) 每个极大右理想 m_R 有限生成；

(3) 每个单右 R- 模有限表现．

证明　(1)⇒(2)．假设 $m = \sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha R$, 其中 A 为某由基数构成的指标集，$\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 m_R 的极小生成系．我们需证 A 为有限集．为此，令 $m_i = \sum\limits_{\alpha < i} x_\alpha R$, 并考虑下面的右理想升链

$$m_1 \leqslant m_2 \leqslant \cdots \leqslant m_i \leqslant \cdots.$$

现令 $E := \bigoplus\limits_{i \in A} E(R/m_i)$, 并定义映射 $f: m \to E = \bigoplus\limits_{i \in A} E(R/m_i)$ 为

$$f(x) = (x + m_i)_{i \in A}, \quad \forall x \in E$$

其中 $x + m_i$ 看作 $R/m_i \subseteq E(R/m_i)$ 的一个元素．注意到 $m = \bigcup\limits_{i \in A} m_i$, 并且若 $x \in m$ 则当 i 充分大时有 $x \in m_i$ 成立．由此可知 $f(x) \in E = \bigoplus\limits_{i \in A} E(R/m_i)$ 成立．

由假设，E 为极大内射模，因为它为内射模 $E(R/m_i)$ 的直和．故存在 $e = (e_i)_{i \in A} \in E$ 使得 $f(x) = ex$ 对所有 $x \in m$ 成立．现对充分大的 i 我们由 $e_i = 0$, 即有 $f(x)_i = x + m_i = 0$. 从而 $x \in m_i$ 对充分大的 i 成立，这表明当 i 充分大时有 $m = m_i$.

(2)⇒(1)．设 $\{E_\alpha | \alpha \in A\}$ 为极大内射右 R- 模的集合，考虑任意 $f \in Hom_R\left(m, \bigoplus\limits_{\alpha \in A} E_\alpha\right)$. 因为 m_R 有限生成，存在有限子集 $F \subseteq A$ 使得 f 的像 $\mathrm{Im}(f)$

包含于 $\bigoplus_{\alpha\in F} E_\alpha$. 又因为 F 有限，所以 $\bigoplus_{\alpha\in F} E_\alpha$ 为极大内射模，从而 f 可以扩张成 $\bar{f}: R \to \bigoplus_{\alpha\in A} E_\alpha$.

(2)⇔(3). 由 Schanuel 引理可得. **证毕**.

熟知，环 R 上内射右 R- 模的商模内射当且仅当 R 为右遗传环. 下面我们研究极大内射模的商模的极大内射性.

命题 6.7.3 对任意环 R, 以下条件等价：

(1) 任意极大内射右 R- 模 E 的商模极大内射；

(2) 环 R 的任意极大右理想 $m \leqslant R_R$ 作为右 R- 模投射.

证明 (1)⇒(2). 只需证明任意极大理想 $m \leqslant R_R$ 相对于所有内射右 R- 模投射. 现在极大内射性是内射性的真推广，我们将证明任意极大理想 $m \leqslant R_R$ 相对于所有极大内射右 R- 模投射. 为此，设 E 是任意极大内射右 R- 模，并考虑下面的短正合列

$$E \to E' \to 0.$$

我们只需证明任意 $f \in Hom_R(m, E')$ 都能提升成 $f': m \to E$. 由假定，E' 是极大内射模，所以 f 能扩张成 $g: R \to E'$. 再注意到 R 是投射模，则 g 可以提升到 $h: R \to E$.

$$\begin{array}{ccccc} R & \leftarrow & m & \leftarrow & 0 \\ h\downarrow & g\swarrow & \downarrow f & & \\ E & \xrightarrow{\pi} & E' & \to & 0 \end{array}$$

只需令 $f' = h|_m$.

(2)⇒(1). 只需对偶前面的证明，连交换图也一样. **证毕**.

注意到右 PF- 环等价于右自内射右 Kasch 环，则我们有下面的命题.

命题 6.7.4 设 R 为右极大内射环. 则 R 为右 Kasch 环当且仅当对任意极大右理想 $m \leqslant R_R$ 成立 $m \cong m^{**}$, 其中 $m^* = Hom_R(m_R, R_R)$ 为 m_R 的 R- 对偶模.

证明 因为 R 极大内射，由命题 8.2.1 我们有下面的短正合列

$$0 \to (R/m)^* \to R^* \to m^* \to 0,$$

因此 m_R 的 R- 对偶模 $m^* \cong R/l(m)$, 从而其二次对偶模 $m^{**} \cong r(l(m))$. 最后注意到环 R 为右 Kasch 环当且仅当 $m = r(l(m))$ 对任意极大右理想 $m \leqslant R_R$ 成立. **证毕**.

我们知道，若 R 为自内射环，则其右奇异理想

$$Z(R_R) := \{x \in R | r(x) \lhd R\}$$

与其 Jacobson 根 $Rad(R)$ 相等. 对极大内射环的情形，我们也有下面的包含关系.

定理 6.7.1 若 R 为极大内射环，则其奇异理想 $Z(R_R) \subseteq Rad(R)$.

证明 只需证明对任意 $x \in Z(R_R)$, $1-x$ 在 R 中左可逆. 因为 $r(1-x)$ 为 R 中本质理想，由 $r(x) \bigcap r(1-x) = 0$ 可得 $r(1-x) = 0$. 由于 $1-x \in R \cong End(R_R)$, 我们可以将 $1-x$ 看作右 R- 同态. 对任意极大右理想 $m \leqslant R_R$, 我们有如下的 R- 同构

$$(1-x): m \to (1-x)m.$$

因此，作为极大右理想 $m \leqslant R_R$ 在 $(1-x): m \to (1-x)m.$ 下的同态像， $(1-x)m$ 也是 R 的极大右理想. 记同构 $(1-x): m \to (1-x)m$ 的逆映射为 $h \in End(R_R)$, 则我们有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} (1-x)m & \to & R \\ h\downarrow & & \downarrow y \\ m & \to & R \end{array}$$

因为 R 极大内射，存在同态 $y \in R \cong End(R_R)$ 满足其在 $(1-x)m$ 的限制等于 $h: (1-x)m \to m$.. 因而我们有 $(y(1-x))(m) = (h(1-x))(m) = 1_m(m) = m$.. 由此可得 $m \subseteq \mathrm{Im}(y(1-x))$.. 现由 m_R 的极大性我们断言或者 $\mathrm{Im}(y(1-x)) = R$ 或者 $\mathrm{Im}(y(1-x)) = m$.

情形一 假定 $\mathrm{Im}(y(1-x)) = R$, 则显然存在 R- 同态 $y' \in R \cong End(R_R)$ 使得 $y'y(1-x) = 1 \in R$, 因为此时 $y(1-x)$ 实际上为同构.

情形二 假设 $\mathrm{Im}(y(1-x)) = m$ 成立，则由

$$m \bigcap \ker(y(1-x)) = \mathrm{Im}(y(1-x)) \bigcap \ker(y(1-x)) = 0,$$

并注意到 m_R 的极大性可得

$$R_R = m \bigoplus \ker(y(1-x)) = \mathrm{Im}(y(1-x)) \bigoplus \ker(y(1-x)),$$

又因为 $y(1-x)|m_R = h(1-x) = 1_m$, 下面的单同态

$$m_R = \mathrm{Im}(y(1-x)) \xrightarrow{y(1-x)} R_R$$

分裂，即存在右 R- 同态 $y'' \in R \cong End(R_R)$ 使得

$$y''y(1-x) = 1_R \in R.$$

所以在两种情况下我们都有 $1-x \in R$ 是左可逆的. **证毕.**

我们知道极大内射性的概念是内射性的真推广. 很自然的问题就是极大内射模在何时是内射模，这个问题与一些长期悬而未决的问题有着内在的联系.

称环 R 为右半 Artin 环，如果每个非零右 R- 模都包含一个单子模，或等价地，每个非零右 R- 模都有非零基座.

定理 6.7.2 若 R 为右半 Artin 环，则每个极大内射右 R- 模都内射.

证明　此定理证明与 Baer 准则的证明相似. 设 $g: K \to M$ 为任意单右 R- 模同态，同时设为 $h: K \to E$ 任意 R- 同态，我们需要验证存在 R- 同态 $\bar{h}: M \to E$ 使得下面的图交换

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\ g\ } & K \\
 & & {\scriptstyle h}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle h} & \\
 & & E & &
\end{array}
$$

不失一般性，我们可以假定 K 是 M 的子模，而 $g: K \to M$ 为嵌入映射. 我们将通过把映射 $h: K \to E$ 逐步扩张为 $h': K' \to E$ 使得 $K \leqslant K' \leqslant M$, 从而得到所求的 R- 同态 $\bar{h}: M \to E$.

为此构造集合

$$\sum = \{(K', h') |\quad K \leqslant K' \leqslant M, h'|_K = h\},$$

因为 $(K, f) \in \sum$, 所以 $\sum \neq \phi$. 定义 $\sum$ 上的偏序 $\prec$ 如下

$$(K', h') \prec (K'', h'') \Leftrightarrow K' \subseteq K'',\ h''|_{K'} = h',$$

由 Zorn 引理，$\sum$ 中存在极大元 (K_0, h_0), 即有如下的交换图

$$
\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\ g\ } & K_0 \\
 & & {\scriptstyle h}\downarrow & \swarrow {\scriptstyle h_0} & \\
 & & E & &
\end{array}
$$

下证 $K_0 = M$.

假设 $K_0 \neq M$, 则 M/K_0 是非零右 R- 模. 因为 R 为右半 Artin 环, 存在 $K' \leqslant M$ 使得 K'/K_0 为单模. 取定 $m \in K' \backslash K_0$. 则

$$I := \{r \in R | mr \in K_0\}$$

是 R 的极大右理想. 定义映射 $\varphi: I \to E$ 为

$$\varphi(r) = h_0(mr), \quad \forall r \in I,$$

易证 $\varphi \in Hom_R(I, E)$. 由假设，同态 $\varphi: I_R \to R_R$ 可扩张成 R- 同态 $\overline{\varphi}: R_R \to R_R$.

现令 $K_1 = K_0 + mR$, 并定义 $h_1: K_1 \to E$ 为

$$h_1(k_0 + mr) = h_0(k_0) + \overline{\varphi}(r), \quad \forall k_0 \in K_0, \quad r \in R,$$

则易知 $h_1 \in Hom_R(K_1, E)$. 如果能证明 h_1 是有定义的，那么因为 $h_1 : K_1 \to E$ 显然是 h_0 的扩张，这就与 (K_0, h_0) 的极大性矛盾. 由此可以断言 $K_0 = M$.

为证明 h_1 是有定义的，假设 $k_0 + mr = 0$, 则由 $mr = -k_0 \in K_0$ 可得 $r \in I$. 从而

$$\varphi(r) = \overline{\varphi}(r) = h_0(mr) = -h_0(k_0),$$

即 $h_1(k_0 + mr) = 0$, 这就推出了 h_1 是有定义的.　　**证毕.**

注意到右 Artin 环是右半 Artin 的，则由定理 6.7.2, 我们可以利用极大内射模刻画 QF- 环.

推论 6.7.1　对任意环 R, 以下条件等价:

(1) R 是 QF- 环;

(2) R 是左 Artin 环，并且 R 为自内射;

(3) R 是左 Artin 环，并且 R 为 max- 内射.

B.L.Osofsky 的一个著名结果表明任何左 (或右) 完全双边自内射环为 QF- 环. 后来 Carl Faith 提出了下面的公开问题: 任何左 (或右) 完全右自内射环为 QF- 环. 这就是著名的 **Faith 猜想**, 这个问题已经迄今为止尚未解决，尽管吸引了大量作者的深入研究.

注意到左完全环是右半 Artin 环，则我们可以得到 Faith 猜想在左完全条件下的等价形式: 任何左完全右极大自内射环为 QF- 环.

下面我们将进一步研究极大内射环.

命题 6.7.5　设 R 为右极大内射环. 则对任意右理想 I, 以及任意包含 I 的极大右理想 m, 我们有下面的同构

$$l(I)/l(m) \cong Hom_R(m/I, R).$$

证明　令

$$\varphi : l(I)/l(m) \to Hom_R(m/I, R)$$

为由如下定义的典范同态

$$\varphi(r + l(m))(x + I) = rx, \forall r \in l(I),\ x \in m.$$

则 φ 显然为单同态. 为证 φ 为满同态，任取 $f \in Hom_R(m/I, R)$. 若以 $\pi : m \to m/I$ 代表典范同态，则因为 R 极大内射，故 $f \circ \pi : m \to R$ 可表为某个 $r \in R$ 的左乘. 因此 $f \circ \pi(x) = f(\pi(x)) = f(x + I) = rx$ 对任意 $x \in m$ 成立. 但是 $r \in l(I)$ 并且显然有 $\varphi(r + l(m)) = f$, 故 φ 为满同态.　　**证毕.**

这个命题启发我们定义下面的 *- 条件，在此条件下 Faith 猜想成立.

定义 6.7.2　称环 R 满足左 *- 条件，如果对任意右理想 I, 以及任意包含 I 的极大右理想 m, 都有 $l(I)/l(m)$ 有限生成成立.

注记 我们知道环 R 为左 π- 凝聚环当且仅当每个有限生成右 R- 模的对偶模有限生成. 因而, 在左 π- 凝聚环中任意右理想的左零化子都有限生成. 由此可知左 π- 凝聚环满足左 *- 条件.

定理 6.7.3 设 R 为左完全, 右极大内射环. 若 R 满足左 *- 条件, 则 R 为 QF- 环.

证明 由定理 6.7.2 我们知道 R 是右自内射环, 并且由 T.Utumi 的一个定理知道 R 为右 PF- 环. 所以 R 为半局部环并且 $rl(I)=I$ 对任意右理想 I 成立, 同时 $l(J)=Soc(R_R)$ 是有限生成的.

现对任意右理想 I, 存在极大理想 m 使得 $I\leqslant m$. 因为 R 为半局部环, 所以存在单同态 $0\to R/m\to R/I$. 由此易知存在正合列

$$0\to m/I\to R/I\xrightarrow{f}R/J\to co\ker(f)\to 0,$$

其中 f 是合成映射 $R/I\to R/m\to R/J$, 其核 $\ker(f)=m/I$. 取对偶模, 并注意到 R 右自内射可知下面的序列

$$0\to (co\ker(f))^*\to l(J)\to l(m)\to Hom_R(m/I,R)\to 0$$

正和. 由假设可知 $l(I)/l(m)\cong Hom_R(m/I,R)$ 有限生成. 又因为 $l(J)=Soc(R_R)$ 有限生成, 所以 $l(I)$ 有限生成. 因为 $rl(I)=I$ f 对任意理想 I 成立, 所以每个右理想都是某个有限生成左理想的零化子. 再又 [21] 知 R 为 QF- 环. **证毕.**

下面我们将研究任意右模 P_R 的特征模 $P^*:=Hom_Z(P,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 的极大内射性. 著名的 Lambek 准则表明右 R- 模 P_R 平坦当且仅当其特征模 $P^*:=Hom_Z(P,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模内射. 如果我们只假设右 R- 模 P_R 的特征模 $P^*:=Hom_Z(P,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模极大内射, 那么我们就能得到平坦性的真推广, 而这种推广的平坦性与 V.S.Ramamurthi 提出的一个著名问题有着内在联系.

命题 6.7.6 设 R 为任意环, P_R 为任意右 R- 模. 则以下条件等价:

(1) 特征模 $P^*:=Hom_Z(P,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为左 R- 模极大内射;

(2) 对 R 的任意极大左理想 ${}_Rm$, 典范映射 $P_R\otimes_R m\to pm$ 为单同态;

(3) $Tor_1^R(P_R,{}_RV)=0$ 对任意单左 R - 模 V 成立.

这个命题启发我们给出下面的定义.

定义 6.7.3 称右 R- 模 P_R 为 **极大平坦模**, 如果 P_R 满足命题 6.7.6 中的条件之一.

因为极大内射性为内射性的真推广, 所以极大平坦性为平坦性的真推广.

我们知道, 环 R 为左完全环当且仅当每个平坦左 R- 模投射. 下面用极大平坦模刻画完全环.

命题 6.7.7 对任意环 R, 以下条件等价:

(1) R 为左完全环;

(2) 每个极大平坦左 R- 模投射.

证明 (1)⇒(2). 只需证明每个极大平坦左 R- 模 $_RP$ 都为平坦模. 由 Lambek 准则, 只需证明其特征模 $P^* := Hom_Z(_RP, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为右 R- 模内射. 因为左 R- 模 $_RP$ 极大平坦, 其特征模 $P^* := Hom_Z(_RP, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为右 R- 模极大内射. 现在 R 为左完全环, 所以 R 为右半 Artin 环. 由定理 6.7.1, 极大内射右 R- 模 P^* 是内射模. **证毕**.

现在我们将利用极大平坦性给出 V.N. Neumann 正则环的刻画, 从而可以给出 V.S.Ramamurthi 问题的部分结果.

大家知道, 环 R 为 V.N. Neumann 正则环当且仅当每个右 R- 模平坦当且仅当每个循环模平坦. 削弱这些条件, V.S.Ramamurthi 猜想: **环R为 V.N. Neumann 正则环当且仅当每个单右R- 模平坦**. 这个著名的公开问题已经有很多人研究过. 环 R 称为右 ***SF***- 环, 如果每个单右 R- 模平坦.

现在我们给出右 SF- 环的极大平坦模刻画. 由此可以看出 Ramamurthi 与右 SF- 环的微妙关系.

命题 6.7.8 对任意环 R, 以下条件等价:

(1) 环 R 为右 SF- 环;

(2) 每个左 R- 模极大平坦.

证明 (1)⇔(2). 这两个条件都等价于说 $Tor_1^R(V_R, _RM) = 0$ 对任意左 R- 模 $_RM$ 和任意单右 R- 模 V_R 成立. **证毕**.

现在我们给出 Ramamurthi 问题的部分结果.

定理 6.7.4 对右半 Artin 环, 以下条件等价:

(1) R 为 V.N.Neumann 正则环;

(2) R 为右 SF- 环.

证明 (2)⇒(1). 只需证明每个极大平坦左 R- 模 $_RP$ 平坦. 为此, 由 Lambek 准则, 只需证明其特征模 $P^* := Hom_Z(_RP, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 作为右 R- 模内射. 现在 R 为左完全环, 所以 R 为右半 Artin 环. 由定理 6.7.1, 极大内射右 R- 模 P^* 是内射模. 另一方向是显然的. **证毕**.

§6.8 FGT- 内射性

在研究 coherent 时, 学者们发现 FP- 内射是一个强有力的工具; 在研究 $\pi-$coherent 时, 我们发现 FGT- 内射性对揭示该类环特别有效. 在本节对 FGT- 内射性做些介绍.

定义 6.8.1 右 R- 模 M 称为右 FGT- 内射模, 如果 $Ext_R^1(A, M)$=0, 对任给

的有限生成无挠右 R- 模 A, 同理可定义左 FGT- 内射模. 类似地，可定义 FGT-平坦性和 FGT- 投射性.

定义 6.8.2 环 R 是右 FGT- 自内射环，如果 R 作为右 R- 模是右 FGT- 内射模，同理可定义左 FGT- 自内射环.

定义 6.8.3 ${}_RM$ 的子模 K 称为 M 的闭子模，如果 M/K 是无挠的.

定义 6.8.4 右 R- 模 M 称为右 FGT- 平坦模，如果对左 R- 模正合列 $0 \to K \to F$, 其中 ${}_RF$ 是有限生成自由模，K 是 F 的闭子模, 均有 $0 \to A\otimes_R K \to A\otimes_R F$ 正合.

类似于环的整体维数和弱整体维数，我们引入环的 FGT- 内射维数.

定义 6.8.5 把 $\inf\{n\,|(Ext_R^{n+1}A, M)=0$, 对任给的有限生成无挠右 R- 模 $\}$ 称之为 M_R 的 FGT- 内射维数，记为 $FGT-\mathrm{inj.dim}\, M_R$. 把 $\sup\{FGT-\mathrm{inj.dim}\, M_R$, 对任给的 $M_R\}$ 称之为 R 的右 FGT- 内射维数，记为 $rFGT-I.\dim R$.

注记 利用整数环这个例子可以说明 FGT- 内射性是内射性概念的真正推广.

命题 6.8.1 下列条件是等价的：

(1) M_R 是右 FGT- 内射模;

(2) 如果 K 是有限生成自由右 R- 模 F 的闭子模，则 K 到 M 的每个右 R- 模同态，均可扩张成 F 到 M 的右 R- 模同态;

(3) 对于任意的单同态 $f: N \to L$, 如果 L/N 是有限生成右 R- 模，则 $f^* = Hom_R(f, M)$ 为满同态;

(4) 任给的正合列 $0\to M \to N \to P \to 0$ 可裂，其中 P 是有限生成无挠右 R-模.

证明 (1)⇔(2)⇔(3). 由定义可直接验证.

(1)⇒(4). 设 $0 \to M \xrightarrow{f} N \to P \to 0$ 是一右 R- 模正合列, 其中 M_R 是右 FGT-内射， P 是有限生成无挠右 R- 模. 那么

$$Hom_R(\mathrm{N}, M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M, M) \to Ext_R^1(P, M) = 0$$

是正合的. 因此 f^* 是满的，故前一个正合列可裂.

(4)⇒(1). 由上面的证明可知. **证毕**.

命题 6.8.2 环 R 是左、右 FGT- 内射当且仅当每个有限生成无挠左、右 R-模是自反模.

证明 设 A 是有限生成无挠右 R- 模, 知存在有限生成无挠左 R- 模 B, 使得序列 $0 \to A \to A^{**} \to Ext_R^1(B, R) \to 0$ 正合, 因 R 为左 FGT- 内射, 故 $Ext_R^1(B, R)$=0, 从而自反. 同理可证左的情况.

反之，同上的方法可证. **证毕**.

推论 6.8.1　R 是左、右 PF- 环当且仅当 R 是左、右 FGT- 内射的 D- 环.

证明　设 R 是左、右 PF- 环, 则每个有限生成左、右 R- 模自反. 由命题 6.8.2 知 R 是左、右 FGT- 内射的 D- 环.

反之, 因 R 是 D- 环, 知每个循环左、右 R- 模无挠, 由命题 6.8.2 知, 每个循环左、右 R- 模自反, 从而 R 是左、右 PF- 环.　**证毕**.

定理 6.8.1　设 R 是右 π- 凝聚环, 则下列陈述等价:

(1) $\varinjlim Ext_R^n(P, M_i) \cong Ext_R^n(P, \varinjlim M_i)(n \geqslant 1)$, 其中 P 是任给的有限生成无挠右 R- 模, $\{M_i\}_{i\in S}$ 是任给的右 R- 模直和系;

(2) FGT- 内射维数不超过 n 的右 R- 模的直和的 FGT- 内射维数也不超过 n;

(3) FGT- 内射模的直和仍然是 FGT- 内射的;

(4) $\bigoplus_{i\in S} M_i$ 是 FGT- 内射当且仅当每个 M_i 是 FGT- 内射.

证明　我们先用数学归纳法证明 (1). 因 π- 凝聚环上每个有限生成无挠模是有限表现的, 由文献 [57] (Theorem 2.1.5) 当 $n=0$ 时成立. 对于 $n \geqslant 1$, 设 P 是任给的有限生成无挠右 R- 模, 那么 P 是有限表现的, 有正合列 $0 \to K \to F \to P \to 0$, 其中 F 是有限自由模且 K 是有限生成无挠模. 从而有正合列

$$Ext_R^{n-1}(F, \varinjlim M_i) \to Ext_R^{n-1}(K, \varinjlim M_i) \to Ext_R^n(P, \varinjlim M_i) \to Ext_R^n(F, \varinjlim M_i).$$

但 $Ext_R^{n-1}(F, \varinjlim M_i) = Ext_R^n(F, \varinjlim M_i)=0$, 从而有 $Ext_R^{n-1}(K, \varinjlim M_i) \cong Ext_R^n(P, \varinjlim M)$. 由归纳假设有

$$Ext_R^{n-1}(K, \varinjlim M_i) \cong \varinjlim Ext_R^{n-1}(K, M_i),$$

因此有

$$\varinjlim Ext_R^n(P, M_i) \cong \varinjlim Ext_R^{n-1}(K, M_i) \cong Ext_R^{n-1}(K, \varinjlim M_i) \cong Ext_R^n(P, \varinjlim M_i).$$

(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4) 显然成立.　**证毕**.

定理 6.8.2　设 R 是右 π- 凝聚环, 则下列陈述等价:

(1) R 是右 FGT- 自内射环;

(2) 每个有限生成无挠左 R- 模是自反的;

(3) 每个内射左 R- 模是 FGT- 平坦的;

(4) 每个平坦右 R- 模是 FGT- 内射的;

(5) 每个投射右 R- 模是 FGT- 内射的;

(6) 每个左 R- 模能被嵌入到一个 FGT- 平坦左 R- 模中.

证明　(4)⇒(5)⇒(1). 显然成立.

(1)⇒(4). 设 L 是平坦右 R- 模, F 是自由右 R- 模, 由文献 [133] (Proposition 11.1) 知任给的右 R- 模正合列 $0 \to K \to F \to L \to 0$ 是纯的且 K 是绝对纯模. 因

R 是右 π- 凝聚环，知 K 是 FGT- 内射，又由 (1) 知，F 是 FGT- 内射，故 L 是 FGT- 内射.

(1)⇒(2). 设 A 是有限生成无挠左 R- 模，存在一有限生成无挠右 R- 模 B, 使得 $0 \to A \to A^{**} \to Ext_R^1(B,R) \to 0$ 是正合列，但因 R 是右 FGT- 自内射环，则 $Ext_R^1(B,R)=0$, 故 A 是自反模.

(2)⇒(1). 同证 (1)⇒(2) 的方法.

(3)⇔(1). 显然成立.

(3)⇔(6). 假设 (3) 成立，因每个左 R- 模都是一内射模的子模，由 (3) 知，每个左 R- 模是一 FGT- 平坦模的子模. 反之，每个内射左 R- 模是 FGT- 平坦左 R- 模的直和项，因此它是 FGT- 平坦的. **证毕**.

定理 6.8.3 设环 R 是右 π- 凝聚环，则下列陈述等价:

(1)$FGT-\text{inj.dim}\, M_R \leqslant n, \quad \forall n \geqslant 1$;

(2)$Ext_R^{n+1}(A,M)=0$, 任给的有限生成无挠右 R- 模 A;

(3) 如果 $0 \to M \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_{n-1} \to E_n \to 0$ 正合，其中 $E_i(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ 为 FGT- 内射模，则 E_n 必为 FGT- 内射模.

证明 (1)⇒(2). 设 A_R 为有限生成无挠模，于是得正和列 $0 \to K \to F \to A \to 0$, 其中 F 为有限生成自由模，因 R 是右 π- 凝聚环，K 也是有限生成无挠右 R- 模. 另外，又有 $Ext_R^{n+1}(A,M) \cong Ext_R^n(K,M)$, 于是运用归纳法知成立.

(2)⇒(1). 显然成立.

(2)⇔(3). 设 A 是有限生成无挠右 R- 模，由 $Ext_R^1(A,E_n) \cong Ext_R^{n+1}(A,M)$ 知，结论成立. **证毕**.

类似于模的内射维数的比较定理，有下列结论.

推论 6.8.2 设环 R 是右 π- 凝聚环，序列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ 是正合的，则下列陈述成立:

(1) $FGT-\text{inj.dim}\ B \leqslant \sup\{FGT-\text{inj.dim}\ A, FGT-\text{inj.dim}\ C\}$;

(2) $FGT-\text{inj.dim}\ A \leqslant \sup\{FGT-\text{inj.dim}\ B, FGT-\text{inj.dim}\ C+1\}$;

(3) $FGT-\text{inj.dim}\ C \leqslant \sup\{FGT-\text{inj.dim}\ B, FGT-\text{inj.dim}\ C-1\}$.

定理 6.8.4 $rFGT\text{-}I.\dim R=0$ 当且仅当 R 是右半遗传左 π- 凝聚环.

证明 由 $rFGT-I.\dim R=0$ 知，每个有限生成无挠右 R- 模是投射模，因此 R 是右半遗传环. 设 $_RA$ 是有限生成无挠左 R- 模，有正合列 $0 \to K \to F \to A \to 0$, 因 R 是右半遗传环，K 是有限生成的，因此 R 是左 π- 凝聚环. 反之，易证. **证毕**.

由定理 6.8.4 知，维数 $rFGT-I.\dim R$ 可以用来衡量一个环与半遗传 π- 凝聚环间的距离.

定理 6.8.5 设环 R 是左、右 π- 凝聚环，下列陈述等价:

(1) $FGT-\text{inj.}\dim_R R \leqslant 1$;

(2) $Ext^1_R(C,P)=0$, 对任给的有限生成无挠左 R- 模 C 和有限生成投射左 R-模 P;

(3) 有限生成无挠左 R- 模的闭投射子模是它的直和项;

(4) 每个有限生成无挠右 R- 模是自反模.

证明 (1)⇒(2). 设 C 是有限生成无挠左 R- 模, 因 R 是右 π- 凝聚环, 存在一有限生成自由左 R- 模, 使得序列 $0\to C\to F\to A\to 0$ 正合, 其中 A 无挠. 因此 $0=Ext^1_R(F,R)\to Ext^1_R(C,R)\to Ext^2_R(A,R)=0$ 正合, 故 $Ext^1_R(C,R)=0$, 即 (2) 成立.

(2)⇒(1). 设 B 是有限生成无挠左 R- 模, 由序列 $0\to K\to G\to B\to 0$ 的正合性, 其中 K 是有限生成无挠模, G 是有限生成自由模, 我们得到 $Ext^2_R(B,R)=0$, 因此由定理 6.8.3 知, $FGT-\text{inj.}\dim_R R\leqslant 1$.

为了证明 (1)⇒(4), 首先指出如果序列 $0\to {}_RR\to E\to U\to 0$ 正合, 其中 E 是内射的, 则 $FGT-\text{inj.}\dim_R R\leqslant 1$ 当且仅当 U 是 FGT- 内射.

(1)⇒(4). 设 A 是有限生成无挠右 R- 模, 则存在有限生成无挠左 R- 模 B, 使得序列 $0\to A\to A^{**}\to Ext^1_R(B,R)\to 0$ 正合, 因 R 是右 π- 凝聚环, 存在一有限生成自由左 R- 模, 使得 $0\to B\to F\to F/B\to 0$ 正合, 且 F/B 是无挠的, 因此 $Ext^1_R(B,R)\cong Ext^1_R(F/B,U)=0$, 故 A 是自反的.

(4)⇒(1). 可类似于上面的方法证明.

(2)⇔(3). 此等价可类似于文献 [18] (Theorem 3.3) 的证明. **证毕.**

定理 6.8.6 设 R 是左、右 π- 凝聚环, 则:

(1) $rFGT-I.\dim R\leqslant w.gl.\dim R\leqslant rFGT-I.\dim R+1\leqslant \text{rgl.}\dim R$;

(2) $lFGT-I.\dim R\leqslant w.gl.\dim R\leqslant lFGT-I.\dim R+1\leqslant \text{lgl.}\dim R$.

证明 我们只须证明 (1) 即可.

首先, 由 $rFGT-I.\dim R$ 的定义知 $rFGT-I.\dim R=\sup\{pdA_R\,|\forall$ 有限生成无挠右 R- 模 $A\}$. 因 R 是右 π- 凝聚环, 故 $w.gl.\dim R=\sup\{pdA_R\,|\forall$ 有限表现右 R- 模 $A\}$, 因此 $rFGT-I.\dim R\leqslant w.gl.\dim R$.

其次, 如果 $rFGT-I.\dim R=\infty$, 显然有 $w.gl.\dim R\leqslant rFGT-I.\dim R+1$. 如果 $rFGT-I.\dim R=n<\infty$, 设 M_R 是任意有限表现右 R- 模, 则有正合列 $0\to K\to F\to M\to 0$, 其中 K 是有限生成无挠右 R- 模. 故 $pdK_R\leqslant n$, 从而 $pdM_R\leqslant n+1$, 因此有 $w.gl.\dim R\leqslant rFGT-I.\dim R+1$.

最后, 如果 $rFGT-I.\dim R=\infty$, 显然有 $rFGT-I.\dim R+1\leqslant rgl.\dim R$. 如果 $rFGT-I.\dim R=n<\infty$, 设 M_R 是任意有限表现右 R- 模, 因 R 是左 π- 凝聚环, 则存在有限生成自由右 R- 模 F, 使得序列 $0\to M\to F\to F/M\to 0$ 正合, 因 $rFGT-I.\dim R=n$, 知 $pd(F/M)_R\leqslant n$, 从而得 $pdM_R\leqslant n-1$, 由 M 的任意性

知, $rFGT-I.\dim R+1\leqslant rgl.\dim R$.

推论 6.8.3 设 R 是左、右 π- 凝聚环, 则下列陈述等价:

(1) R 是正则环;

(2) R 是右 π- 凝聚, 且 $rFGT-I.\dim R<\infty$;

(3) R 是左 π- 凝聚, 且 $lFGT-I.\dim R<\infty$.

命题 6.8.3 设 R 是右 π- 凝聚环, M_R 是有限生成无挠右 R- 模, 则对任意非负整数 n, $pd(M_R)\leqslant n\Leftrightarrow Ext_R^{n+1}(M,N)=0$, 对任意的有限生成无挠右 R- 模 N.

证明 用数学归纳法容易证明. **证毕**.

推论 6.8.4 设 R 是右 π- 凝聚环, M_R 是有限生成无挠右 R- 模, n 为非负整数, 如果 $pdM=n$, 则 $Ext_R^n(M,R)\neq 0$.

证明 因 $pdM=n$, 由命题 6.8.3 知, 存在一个有限生成无挠右 R- 模 N, 使得 $Ext_R^n(M,N)\neq 0$, 因 N 是有限生成无挠右 R- 模, 则存正合列 $0\to N_1\to F\to N\to 0$, 其中 F 是有限生成自由模, N_1 是有限生成无挠模, 则有正合列

$$Ext_R^n(M,F)\to Ext_R^n(M,N)\to 0,\ \text{显然}\ Ext_R^n(M,R)\neq 0.$$

证毕.

定理 6.8.7 设 R 是右 π- 凝聚环, 则下列陈述等价:

(1) $rFGT-I.\dim R=n<\infty$;

(2) $rFGT-I.\dim R_R=n<\infty$, 且有限生成自由右 R- 模的闭子模的投射维数不超过 $n-1$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 由 (1), 存在一个有限生成无挠右 R- 模 A, 且 $pdA=n$, 因此由推论 6.8.4 知, $rFGT-I.\dim R_R=n$.

(2) $\Rightarrow$(1). 由 $rFGT-I.\dim R_R=n<\infty$, $rFGT-I.\dim R\geqslant n$, 但从 (2) 的另一个条件知, $rFGT-I.\dim R\leqslant n$. **证毕**.

注记 1 FGT- 内射性的概念已被我的一个研究生简红推广为 CT- 内射性, 即在定义中用循环无挠模替代有限生成无挠模. 当然, 随之引入了 CT- 内射维数, 得到了很多有趣的结果. 同时, 另外一个研究生余柏林还引入 CT- 投射和 CT- 平坦等概念. 另外, 如果我们将第四章有关 IF- 环的研究思路与本章对内射性做的种种推广结合起来, 会得到许多新的研究课题, 必将进一步推动有关 QF- 环的研究.

注记 2 关于内射性的推广还有很多, 如 Camill 等引进了 IN 内射性 [35], 陈建龙等还讨论过 A- 内射性 [183] 在这里我们就不面面俱到了.

第 7 章　Pseudo-Frobenius 环及其推广

根据著名的 Morita 定理，环 R 具有自对偶当且仅当正则模 R_R 与 ${}_RR$ 都是内射余生成元．显然 QF- 环具有自对偶．但是在相当长一段时间内， QF- 环也是具有自对偶的环仅有的例子．直到 1966 年， Osofsky 才去掉 QF- 环的链条件而保留了 QF- 环的其他特征，从而引入了另一类非常重要的环类，后来称之为 PF- 环．任意 QF- 环都是双边 PF- 环，一般地，反过来不成立．并且与 QF- 环不同的是 PF- 环不是左右对称的． Azumaya[13], Osofsky[115] 和 Utumi[149] 各自独立地证明了 "环 R 是右 PF- 环当且仅当 R 是具有本质右基座的半完全环右自内射"．这是 PF- 环的一个应用十分广泛的特征，这为后来推广 PF- 环奠定了基础．在 1995 年, Nicholson 与 Yousif 合作 [108] 引入了广义 PF(简记为 GPF) 的概念． PF- 环的许多特征都被推广到了 GPF- 环上. 2001 年， Nicholson 与 Yousif 再次合作 [111] 引入了 FP- 环的概念，这是对 PF- 环的另一种推广． PF- 环的许多特征都被推广到了 GPF- 环和 FP- 环上．在本章，我们系统地总结了 PF- 环极其推广形式的 GPF- 环和 FP- 环的一些著名结果.

§7.1　PF- 环的基本特征

首先，我们给出 PF- 环的 Azumaya 定义.

定义 7.1.1　环 R 称为右 (左)**PF- 环**, 如果每个忠实右 (左)R- 模都是生成元.

我们给出 PF- 环最为常见的特征刻画，这些特征出自于 Azumaya 、 Osofsky 和 Utumi.

定理 7.1.1　下列条件等价:

(1) R 是右 PF- 环;

(2) R 是右自内射环且 R_R 是 **Mod-R** 中的一个余生成元;

(3) R 是右自内射环且 $Soc(R_R)$ 是有限生成的本质子模;

(4) R 是右自内射右半完全环且 $Soc(R_R)$ 是本质的.

证明　(2)⇒(1). 由于 R_R 是 **Mod-R** 中的一个余生成元，则环 R 的任意右理想都是右零化因子理想. 于是, 如果 M 是任意忠实右 R- 模且 $Trace_R(M) = I \neq R$, 有 $l(I) \neq 0$, 若 $l(I) = 0$, 有 $r(l(I)) = R$, 从而有 $I = R$ 矛盾．故存在一个非零元 $a \in R$ 使得 $aI = 0$, 于是任意 $f \in M^* = Hom_R(M, R)$ 和 $m \in M$ 有 $af(m) = 0$, 即 $aM^* = 0$. 由于 M 是忠实的，且 R_R 是内射模，有 R 是 M^I 的直和项．即存在 X

使得 $R\oplus X=M^I$. 于是运用对偶函子 $(-)^*=Hom_R(-,R)$ 且 $(M^I)^*\cong(M^*)^I$, 有 R 是 $(M^*)^I$ 的直和项，从而 M^* 是忠实的，又因为 $aM^*=0$, 有 $a=0$ 矛盾. 故 $Trace_R(M)=R$, 从而 M 是一个生成元.

(1)⇒(3). 设 G 是每个单右 R- 模等价类的代表的内射包络的直和, 由于 G 是余生成元, 从而 G 是忠实的, 故 G 是一个生成元, 存在整数 $n>0$, 使得 $G^n=R\oplus X$. 由分解惟一性定理知 R 是有限个 Soc 是单模的不可分内射模的直和.

(3)⇒(4). 实际上 (3) 暗示了 R 是单右理想的内射包络的直和，于是 R 有一个 Azumaya 图，所以 R 是一个模根幂等提升的半局部环 (见文献 [47], p.45), 从而 R 为半完全环.

(4)⇒(2). 如果 eR 和 fR 是两个主不可分右理想, 由内射性知 $Soc(eR)$,$Soc(fR)$ 都是单的，且 $Soc(eR)\cong Soc(fR)$ 当且仅当 $eR\cong fR$. 于是每个单右 R- 模同构于某个右主不可分理想的 Socle. 由于 R 是右自内射环，故 R_R 是一个余生成元.

证毕.

引理 7.1.1 设 R 是右自内射环，则

(1)$J(R)=Z_r(R)=\{x\,|xI=0,I$ 是 R 的本质右理想 $\}$；

(2)R 模 $J(R)$ 幂等元提升；

(3)$R/J(R)$ 是右自内射环.

证明 见定理 1.2.4. **证毕**.

引理 7.1.2 模 M_R 为右 R- 模范畴中的余生成元当且仅当对任意是任意单模 U_R, M_R 同构地包含 $E(U)$.

证明 必要性. 因为模 M_R 为右 R- 模范畴中的余生成元，故 $E(U_R)$ 可以嵌入 M_R 的某个直积 M^I(其中 I 为某指标集). 因此单模 U 到直积 M^I 的某个分量 $M_i=M_R$ 的典范投射 $p_i:U\to M_i$ 不为零. 若记 $E(U)$ 到分量 $M_i=M_R$ 的典范投射为 $\pi_i:E(U)\to M_i$, 则由 U 为单模得 $\ker(\pi_i)\bigcap U=\ker(p_i)\bigcap U=0$, 再由 $U\triangleleft E(U)$ 可得 $\ker(\pi_i)=0$, 故 $E(U)$ 可以嵌入到分量 $M_i=M_R$.

充分性. 设 N 为任意右 R- 模，定义映射 $N\to\prod\limits_{f\in Hom_R(N,M)}M_f$ 为对任意 $x\in N$ 有 $x\mapsto(f(x))$. 现给定 $x\in N$, 则 xR 具有单商模 U, 记相应的典范满同态为 $\pi:xR\to U$. 则由 $E(U)$ 的内射性可知 $\pi:xR\to U$ 可扩张成同态 $N\to U$. 又因为 M_R 同构地包含 $E(U)$, 从而可得同态 $\sigma:N\to M$ 使得 $\sigma(x)\neq 0$. 因此 N 可以嵌入直积 $\prod\limits_{f\in Hom_R(N,M)}M_f$. 即证模 M_R 为右 R- 模范畴中的余生成元. **证毕**.

引理 7.1.3 若 R 是半局部环且 R_R 是右 R- 模范畴的余生成元，则 R 为右自内射环.

证明 因为 R 为半局部环，故只有有限个互不同构的单右 R- 模 $U_1,\cdots,U_n$.

现令

$$C = E(U_1) \oplus \cdots \oplus E(U_n).$$

则 C 为极小内射余生成元，因此 $C \subseteq R_R$, 从而 C 为投射模. 显然每个单右 R- 模都是 C 的同态像，故 C 又是右 R- 模范畴的生成元. 特别地， C 有限生成 R_R, 再由 C 的内射性知 R_R 内射，即证 R 为右自内射环.　　**证毕.**

我们回忆一下环 R 称为右 (左)**Kasch 环**, 如果 R 包含每个单右 (左)R- 模的一个同构像. 下面的定理是 T. Kato 给出的 (见文献 [82]).

定理 7.1.2　下列条件等价：

(1) R 是右 PF- 环;

(2) R 是右自内射环且对每个极大右理想 I_R 有 $l(I) \neq 0$;

(3) R 是右自内射且右 Kasch 环;

(4) R/J 是 Artin 环且对每个单右 R- 模 U_R， $E(U)$ 是投射模;

(5) $C_R = \oplus_i E(U_i)$ 是一个投射余生成元，其中 $\{U_i\}$ 是一族所有相互不同构的单右 R- 模.

证明　由 $Hom_R(R/I, R) \cong l(I)$ 知 (1) 、 (2) 和 (3) 的等价性显然.

(1) $\Rightarrow$(4). 由定理 7.1.1 知， R 是半完全环，从而 R 是半局部环. 令 $C = E(U_1) \oplus E(U_2) \oplus \cdots \oplus E(U_n)$(其中 U_i 都是互不同构的单右 R- 模). 于是 C 是一个极小内射余生成元. 于是 $0 \to C \to R$ 是正合列，故对每个单右 R- 模 U,$E(U)$ 是投射模.

现在我们给出 R 是半完全环的一个直接证明. 先证明一个辅助命题：如果 R_R 是内射余生成元且 $J(R) = 0$, 则 R 是右 Aritin 环. 事实上，由于 R 是右自内射环，由引理 7.1.1 知 $J = Z_r(R) = \{xR | xI = 0, I$ 是本质右理想 $\}$. 因此，如果 I 是一个本质右理想，有 $l(I) = 0$. 由于 R_R 是余生成元，有 $r(l(I)) = I = R$, 故 R 的确不包含非平凡的本质右理想，从而 R 是右 Aritin 环.

因 R 是右自内射环，则 R/J 是 Aritin 环. 如果对每个单右 R- 模存在一个幂等元 e 使得它同构于 eR/eJ. 事实上，有每个单右 R/J- 模都可以嵌入 R/J 中，即 R/J 是右 Kasch 环. 由 R_R 的内射性知作为右 R/J- 模， R/J 是内射模. 因此, R/J 是模范畴 $\boldsymbol{M_{R/J}}$ 中的一个内射余生成元，由上面知 R/J 是右 Aritin 环，即 R 是半局部环.

(4)$\Rightarrow$(1). 设 U 是任意单右 R- 模. 由于 $E(U)$ 是不可分的内射模和投射模，由引理 7.1.2 知， R_R 是一个余生成元. 由于 R_R 是余生成元且 R/J 是 Aritin 环，由引理 7.1.3 知 R_R 内射. 由定理 7.1.1 知， R 是右 PF- 环.

(1)$\Rightarrow$(5). 由 (1)$\Rightarrow$(4) 知 $E(U_i)$ 是投射模，从而 C_R 是投射模. 但由于 R/J 是半单环，每个单右 R- 模同构于 $E(U_i)/E(U_i)J$(对某个单右 R- 模 U_i). 于是每个单右 R- 模都是 C 的满同态像.

设 I 是 R 的一个极大右理想，由于 C 是投射模，对同态 $g: C \to R/I$, 存在一个映射 $f: C \to R$ 使得 $g = \pi \circ f$, 于是有 $f(C) \neq 1$. 故 R 是 C 的同态像的所有右理想的和.

(5)⇒(1). 由于 C_R 是一个生成元， R_R 是内射模且是包含 R 的极小右理想的不可分右理想的直和. 于是， R/J 是半单环. 因此 R 包含每个单右 R- 模的同构像. **证毕.**

引理 7.1.4 设 R 是左 Kasch 环，则无挠右 R- 模的每个有限生成投射子模都是直和项.

证明 设 $0 \to P \to A$ 是一个右 R- 模正合列， P 是有限生成投射右 R- 模， A 是无挠右 R- 模. 于是得正合列： $A^* \to P^* \to B \to 0$ (其中 B 是有限生成左 R-模). 从而得交换图：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & B^* & \to & P^{**} & \to & A^{**} \\ & & & & \uparrow \delta_P & & \uparrow \delta_A \\ & & 0 & \to & P & \to & A \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

于是有 $B^* = 0$. 由于 R 是左 Kasch 环且 B 是有限生成左 R- 模，故 $B = 0$. 又因为 P^* 是投射左 R- 模，故满同态 $A^* \to P^* \to 0$ 分裂正合. 从而正合列 $0 \to P \to A$ 也分裂正合. **证毕.**

下面的定理是 T. Kato 给出的 (见文献 [83]).

定理 7.1.3 下列关于 R 的条件等价：

(1)R 是右 PF- 环;

(2)$E(R_R)$ 是无挠右 R- 模且 R 是双边 Kash 环;

(3)$R_R \oplus R_R$ 的每个商模都是无挠模且 R 是左 Kasch 环;

(4)R_R 是 Mod-R 中一个余生成元且只存在有限个互不同构的单右 (左)R- 模.

证明 由定理 7.1.1 知，(1) 等价于 R_R 是一个内射余生成元. 易证 (1)⇒(2) 、(3) 、 (4).

(2)⇒(1). 由于 R 是右 Kasch 环，R 包含每个单右 R- 模的同构像. 显然 $E(R_R)$ 也包含每个单右 R- 模的同构像. 由于 $E(R_R)$ 是内射模，故 $E(R_R)$ 是一个余生成元，又因为 $E(R_R)$ 是无挠模，于是 ΠR_R 是一个余生成元，等价地， R_R 是一个余生成元，又因为 $E(R_R)$ 是无挠模，由引理 7.1.4 知， R_R 是内射模.

(3)⇒(1). 先证 R_R 是内射模. 假设 R_R 不是内射模，存在一个 $a \in E(R_R)$ 但 $a \notin R_R$. 由于 $R + aR$ 是 $R_R \oplus R_R$ 的满同态像，有 $R + aR$ 是无挠模，由引理 7.1.4 知， R_R 是 $R + aR$ 的直和项. 由于 R_R 是 $E(R_R)$ 的本质子模，从而有 $a \in R$, 矛

盾. 故 R_R 是内射模. 又由于每个循环右 R- 模都是 $R_R \oplus R_R$ 的满同态像, 由假设知, 每个循环右 R- 模都是无挠模, 于是 R 一定是右 Kasch 环, 由定理 7.1.2 知, R 是右 PF- 环.

(4)⇒(1). 由于 R_R 是 **Mod-R** 中的一个余生成元对, 每个单右 R- 模 U 有包含映射: $E(U) \to R$, 所以都是 $E(R)$ 是投射模, 由条件及定理 7.1.2 知 R_R 是内射模. **证毕.**

§7.2 双边 PF- 环

根据著名的 Morita 定理, 环 R 具有自对偶当且仅当正则模 R_R 与 ${}_RR$ 都是内射余生成元, 或则等价地, R 为双边 PF- 环. 因此双边 PF- 环的研究对 Morita 对偶理论的研究具有重要的意义. 在本节, 我们将系统地总结双边 PF- 环的一些特征.

一个环 R 称为双边 PF- 环如果 R 既是右 PF- 环又是左 PF- 环. 下面的定理是 T. Kato 给出的 (见文献 [82]).

定理 7.2.1 下列关于环 R 的条件等价:

(1) 自反 R- 模的子模和商模都是自反的;

(2) 有限生成右 R- 模和有限生成左 R- 模都是自反的;

(3) 每个循环右 R- 模和每个循环左 R- 模都是自反的;

(4) R 是双边 PF- 环;

(5) R 是双边自内射环且对每个极大右理想 m_R, $l(m) \neq 0$;

(6) R 分别是 **Mod-R** 和 **R-Mod** 中的余生成元.

证明 (1)⇒(2) 、 (3) 是显然的.

(3)⇒(4). 由第 3 章知, R 是双边自内射环且满足零化子条件. 从而 R 是双边 PF- 环.

(4)⇒(5) 显然.

(5)⇒(4). 由定理 7.1.2 知, R 是右 PF- 环. 对任意极大左理想 L, 在右 PF- 环中有 $r(L) \neq 0$. 因此 R 也是左 PF- 环, 故 R 是 **Mod-R** 和 **R-Mod** 中的余生成元.

(6)⇒(1). 设 $0 \to A \to B \to B/A \to 0$ 是右 R- 模正合列, B 是自反的. 由 R 是双边自内射环, 于是有下列交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A^{**} & \to & B^{**} & \to & (B/A)^{**} & \to & 0 \\ & & \uparrow \delta_A & & \uparrow \delta_B & & \uparrow \delta_{B/A} & & \\ 0 & \to & A & \to & B & \to & B/A & \to & 0 \end{array}$$

由于 B 是自反的. 故 δ_A 和 $\delta_{B/A}$ 都是同构. **证毕.**

定理 7.2.2 下列关于环 R 的条件等价：

(1) R 是双边 PF- 环；

(2) $E({}_RR)$ 和 $E(R_R)$ 都是无挠的且 R 是右 (左)Kasch 环；

(3) ${}_RR\oplus R_R$ 和 $R_R\oplus_R R$ 的每个商模都是无挠的；

(4) 对任意单左 R- 模 U 和任意单右 R- 模 V,$E(U)$ 和 $E(V)$ 都是无挠的.

证明 由定理 7.1.3 易知 (1)⇒(2),(1)⇒(3),(1)⇒(4) 成立. 下证 (3)⇒(1). 由于每个循环左 R- 模和每个循环右 R- 模分别是 ${}_RR\oplus_R R$ 和 $R_R\oplus R_R$ 的同态像，从而是无挠的. 对任意极大右理想 M_R 有 R/M_R 是单右 R- 模，从而是无挠模即 R_R 余生成 R/M_R, 即

$$0=\bigcap\{\ker f\,|f\in Hom_R(R/M_R,R)\},$$

从而一定存在一个 $0\neq f\in Hom_R(R/M_R,R)$, 即 $Hom_R(R/M_R,R)\neq 0$. 而 $Hom_R(R/M_R,R)\cong l(M)\neq 0$ 即证得 R 是右 Kasch 环. 同理，可证 R 是左 Kasch 环. 由定理 7.1.3 知 R 是双边 PF- 环.

(4) ⇒(1). 设 U_R 是任意单右 R- 模. 设 $i:U\to E(U)$ 是自然嵌入映射，由于 $E(U)$ 是无挠的，即 R_R 余生成 $E(U)$. 故一定存在一个 $g:E(U)\to R_R$ 使得 $g\circ i\neq 0$ 而 U_R 是单模，从而 $g\circ i$ 是单同态. 又因为 i 是本质单同态，从而 g 一定是单同态. 而 $E(U)$ 是内射模，从而 $E(U)$ 是投射模. 由引理 7.1.2 知 R_R 是一个余生成元. 同理可证 ${}_RR$ 也是余生成元. 由定理 7.2.1 知 R 是双边 PF- 环.

(2) ⇒(1). 见定理 7.1.3, (2)⇒(1) **证毕**.

下面我们将介绍双边 PF- 环的线性紧性刻画，这是 P. N. Anh 的工作. 首先，我们给出线性紧模的概念.

考虑 R- 模 M 的子模族 $\{M_\alpha|\alpha\in A\}$ 以及 $\{m_\alpha\in M|\alpha\in A\}$. 称系统 $(m_\alpha,M_\alpha)|\alpha\in A\}$ 是**有限可解的**, 如果对 A 的任意有限子集 F, 都存在元素 $m_F\in M$ 使得同余式 $m_F\equiv m_\alpha(\mathrm{mod}\,M_\alpha)$ 对任意 $\alpha\in F\subseteq A$ 均成立. 称系统 $\{(m_\alpha,M_\alpha)|\alpha\in A\}$ 是可解的，如果 $m\in M$ 使得同余式 $m\equiv m_\alpha(\mathrm{mod}\,M_\alpha)$ 对任意 $\alpha\in A$ 都成立.

定义 7.2.1 称 R- 模 M 是 (依离散拓扑) 线性紧的，如果每个有限可解的同余式 $m\equiv m_\alpha(\mathrm{mod}M_\alpha)$, $\alpha\in A$ 都是可解的.

下面的定理是 P.N. Anh 给出的 (见文献 [3]).

定理 7.2.3 环 R 为双边 PF- 环当且仅当正则模 ${}_RR$ 与 R_R 都是有限余生成的线性紧模，并且单模的对偶模是单的.

证明 充分性. 证明分为以下几步来完成

(1) 对左理想的滤基 $\{L_\alpha\}$, 成立等式 $r(\bigcap L_\alpha)=\bigcup r(L_\alpha)$. 事实上，每个 $x\in R$ 都可诱导一个连续同态 $x:R\to R$ 为 $r\mapsto rx$. 由 ${}_RR$ 的线性紧性，若 $x\in r(\bigcap L_\alpha)$ 下，则有 $0=(\bigcap L_\alpha)x=\bigcap L_\alpha x$. 因为 ${}_RR$ 为余生成元，所以存在 α 使得 $x\in r(L_\alpha)$, 即证 $r(\bigcap L_\alpha)=\bigcup r(L_\alpha)$ 成立.

(2) 环 R 的左右基座相等，即 $Soc(_RR) = Soc(R_R)$. 为此，考虑极小左理想 Ra. 由 $Ja = 0$ 可得 $a \in r(J)$. 由典范同构 $Hom_R(R/J,_R R) \cong r(J)$ 知 a 可看作 $Hom_R(R/J,_R R)$ 的一个元素. 因为左 R- 模 R/J 是单模的有限直和，又由假设知单模的有限直和自反，因此 aR 一定为半单模. 故 $aR \in Soc(R_R)$, 进而由 $Soc(R_R)$ 为双边理想知 $Ra \in Soc(R_R)$. 因此 $Soc(_RR) \subseteq Soc(R_R)$, 再由对称性知 $Soc(R_R) \subseteq Soc(_RR)$, 即证 $Soc(_RR) = Soc(R_R)$.

(3) 设 $e \in R$ 为任意本原幂等元. 由假设知 eR 为其基座 $Soc(eR)$ 的本质扩张. 易知 $l(Soc(eR))$ 包含 $R(1-e)+J$, 并且 $e \notin l(Soc(eR))$, 故 $l(Soc(eR))$ 显然为极大左理想. 因此 $Soc(eR)$ 可看作单模 $R/l(Soc(eR))$ 的对偶模的非零子模，从而 $Soc(eR)$ 为单模. 由对称性， $Soc(Re)$ 也为单模. 又因为 R 为线性紧的，所以 R 为半完全环，从而存在正交中心幂等元的完备集 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 使

$$R = Re_1 \oplus \cdots \oplus Re_n = e_1R \oplus \cdots \oplus e_nR,$$

结合上面的证明可知左 R- 模 R/J 的对偶模为

$$Hom_R(R/J,_R R) \cong r(J) = Soc(R_R),$$

同理，右 R- 模 R/J 的对偶模为

$$Hom_R(R/J, R_R) \cong l(J) = Soc(_RR).$$

(4) 对每个有限生成左理想 $L \neq 0$ 成立 $r(L) \neq r(JL)$. 首先考虑主理想的情形. 设 $L = Ra$ 为主理想，则由 R_R 有限余生成知存在 $b \in R$ 使得 abR 为极小右理想. 进而由 $Soc(_RR) = Soc(R_R)$ 可得 $Jab = 0$, 因此 $b \in r(Ja)\backslash r(a)$, 即 $r(Ja) \neq r(a)$. 归纳地，假定 $L = Ra_1 + \cdots + Ra_n$. 记 $L_1 = Ra_1 + \cdots + Ra_{n-1}$, 则由归纳法知 $r(JL_1) \neq r(L_1)$. 现选择 $b \in r(JL_1)\backslash r(L_1)$. 若 $a_nb \neq 0$, 则存在 $c \in R$ 使得 a_nbcR 为极小右理想，因而 $a_nbcR \in Soc(_RR) = Soc(R_R)$, 即有 $Ja_nbc = 0$. 由此可知 $bc \in r(JL)\backslash r(L)$, 因而总有 $r(JL) \neq r(L)$.

(5) 对每个左理想 L 及 $a \in R$ 满足 $r(L) \subseteq r(a)$, 存在极小的有限生成左理想 $K \subseteq L$ 使得 $r(K) \subseteq r(a)$. 为此，构造集合

$$\Omega := \{K \subseteq L | K\text{为有限生成子理想，且}r(K) \subseteq r(a)\},$$

因为 $aR \cong R/r(a)$ 有限余生成，所以由等式 $r(\bigcap L_\alpha) = \bigcup r(L_\alpha)$ 可知存在有限个元素 $x_1, \cdots, x_n$ 使得 $\bigcap_i r(x_i) \subseteq r(a)$. 故 Ω 非空. 如果 $\{K_\alpha\}$ 为满足 $r(K_\alpha) \subseteq r(a)$ 的有限生成左理想降链，则

$$r(\bigcap K_\alpha) = \bigcup r(K_\alpha) \subseteq r(a),$$

由此我们可得一有限生成左理想 $T \subseteq \bigcap K_\alpha$ 满足 $r(T) \subseteq r(a)$. 再由 Zorn 引理知, 存在极小的有限生成左理想 $K \subseteq L$ 使得 $r(K) \subseteq r(a)$. 现若 T 为包含在 K 中的任意左理想使得 $r(T) \subseteq r(a)$, 则由上面的结果知存在左理想 $T' \subseteq T \subseteq K$ 满足 $r(T') \subseteq r(a)$. 由极小性可得 $T = T' = K$. 因此我们得到包含在 L 中的极小左理想 K 使得 $r(K) \subseteq r(a)$.

(6) 对每个左理想 L 及 $a \in R$ 满足 $r(L) \subseteq r(a)$, 存在 $b \in L$ 使得 $r(a) = r(b)$. 假设 $a \neq 0$, 则由 (5) 知存在极小的有限生成左理想 $K \subseteq L$ 使得 $r(K) \subseteq r(a)$, 特别有 $K \neq 0$. 现定义映射 $\varphi_1 : r(JK)/r(K) \to (K/JK)^*$ 为对任意 $x \in r(JK)$, $y \in K$,

$$\varphi_1(x + r(K)) = yx,$$

则显然 φ_1 为单同态. (下证 φ_1 为同构). 设 $N = \varphi_1(r(JK)/r(K))$, 则 N 是 $M = (K/JK)^*$ 的非零子模. 现假设 $N \neq M$, 则存在包含于 K/JK 的非零子模 $\overline{P}$ 且满足对任意的 $0 \neq n \in N$ 都存在 $\overline{y} \in \overline{P}(\overline{y}n \neq 0)$, 因此 $\overline{P}$ 在满同态 $K \to K/JK$ 的逆同态像 P 有: $JK \subset P \subset K$ 且对每个 $x \in r(JK)\backslash r(K)$ 都存在 $y \in P(yx \neq 0)$, 因此 $r(P) = r(K) \subseteq r(a)$. 由 (5) 知存在有限生成左理想 $P' \subset P$ 满足: $r(P') \subseteq r(a)$ 这与 K 的极小性矛盾, 所以 $N = M$, 即 φ_1 是同构.

现取 $0 \neq f \in K^*$. 因为 Kf 为有限生成非零左理想, 由 (4) 知存在 $c \in r(JKf)/r(Kf)$, 由此可知 fc 可看作 $(K/JK)^*$ 中的元素, 因此 fcR 为半单模. 进而 K^* 为其基座 $Soc(K^*)$ 的本质扩张. 另一方面, 由 K/JK 为单模的有限直和, 易证 $Soc(K^*) = (K/JK)^* := Hom_R(K/JK, R)$, 且 K^* 有限余生成.

现对于 $A = K + Ra$ 等式 $r(A) = r(K) \bigcap r(a) = r(K)$ 成立, 因而可定义映射 $\varphi_2 : r(a)/r(K) \to (A/Ra)^*$ 为对任意 $x \in r(a)$, $y \in A$.

$$(y + Ra)\varphi_2(x + r(K)) = yx,$$

则易知 φ_2 为单同态. 由同构

$$A/Ra = (K + Ra)/Ra \cong K/(K \bigcap Ra)$$

知 $r(a)/r(K)$ 可看作 $(K/K \bigcap Ra)^*$ 的子模, 因而也可看作 K^* 的子模. 又因为 K^* 有限余生成, 故若 $r(a) \neq r(K)$ 则有非零交

$$H := (r(a)/r(K)) \bigcap (r(JK)/r(K))$$

则 H 真包含于 K^* 的 Scale 中, 否则我们有 $r(JK) \subseteq r(a)$, 与 K 的极小性矛盾. 现假设 $r(a) \neq r(K)$, 则由 φ_1 为同构知, K/JK 存在非平凡分解

$$K/JK = \overline{P} \oplus \overline{Q},$$

其中，$\overline{Q}$ 的对偶模为 H, $\overline{P}$ 为 H 的零化子. 这表明 $\overline{P}$ 在典范同态 $K \to K/JK$ 下的原像 P 真包含于 K, 且 $r(P)/r(K) = H$. 由此可知 $r(P) \subseteq r(a)$, 从而存在有限生成左理想 T 真包含于 K 使得 $r(T) \subseteq r(a)$. 这与 K 的极小性矛盾. 因此必定有 $r(a) = r(K)$. 再由 $aR \cong R/r(a)$ 且 $r(JK)/r(K) = (K/JK)^*$ 可知 $(K/JK)^*$ 可看作 $Soc(R_R)$ 的子模. 进而，K/JK 同构于左 R- 模 $R/J = (Soc(R_R))^*$ 的一个直和项，因此 K/JK 可由一个元素生成. 又因为 K 有限生成，故 K 为主理想，从而存在某个 $b \in R$ 使得 $K = Rb$, 即证 $r(a) = r(b)$.

(7) 对任意两个元素 $a, b \in R$ 满足 $r(a) = r(b)$, 存在元素 $s \in R$ 使得 $b = sa$. 不妨设 $a \neq 0$, 则由等式 $r(a) = r(b)$ 知，由 $ar \mapsto br$ 定义的映射 $aR \to bR$ 是定义好了的同构. 令 $t \in R$ 使得 atR 为极小右理想，则上面的同构使得 $atR \cong btR$. 因此 $r(at) = r(bt)$ 为极大右理想，并且易证 $Hom_R(R/r(at), R) \cong lr(at)$. 进而 at 与 bt 都是单模 $lr(at)$ 的生成元. 因此存在 $s \in R$ 使得 $bt = sat$. 由此可知 $r(b - sa)$ 真包含 $r(a)$. 现构造集合

$$\Omega := \{I_\alpha \supseteq r(a) |\ \text{存在 } s_\alpha \in R \text{ 满足 } (b - s_\alpha)I_\alpha = 0\},$$

若 $I_1 \subseteq I_2 \in \Omega$, 则存在 $s_1, s_2 \in R$ 使得 $(b - s_1 a)I_1 = 0$,$(b - s_2 a)I_2 = 0$, 由此可得

$$\begin{aligned}(s_1 - s_2)aI_1 &= ((b - s_2 a) - (b - s_1 a))I_1 \\ &\subseteq (b - s_2 a)I_1 + (b - s_1 a)I_1 \\ &\subseteq (b - s_2 a)I_2 + (b - s_1 a)I_1 = 0,\end{aligned}$$

即 $s_1 - s_2 \in l(aI_1)$. 故集合 Ω 可由集合包含关系偏序化. 现考虑 Ω 中任意升链 $\{I_\alpha\}$. 对任意 α, 令 $s_\alpha \in R$ 满足 $(b - s_\alpha)I_\alpha = 0$. 现考虑同余方程 $s \equiv s_\alpha(\mathrm{mod} l(aI_\alpha))$. 若

$$I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n$$

为升链，则 $s_i - s_n \in l(aI_i)$, 即 $s_n \equiv s_i(\mathrm{mod} l(aI_i))$. 从而由线性紧性知，同余方程 $s \equiv s_\alpha(\mathrm{mod} l(aI_\alpha))$ 可解，即存在 $s \in R$ 使得 $s \equiv s_\alpha(\mathrm{mod} l(aI_\alpha))$. 若 $I = \bigcup_\alpha I_\alpha$, 则对任意 α, 有 $(s - s_\alpha)aI_\alpha = 0$, 因此 $(b - sa)I_\alpha = 0$, 即 $(b - sa)I = 0$, 由此可得 $I \in \Omega$. 由 Zorn 引理知存在极大元 $I \in \Omega$, 并令 $s \in R$ 使得 $(b - sa)I = 0$. 下证 $I = R$, 从而 $b = sa$. 反证法. 假设 $I \neq R$, 则由 (6) 知存在 $u \in R$ 满足 $r(b - sa) = r(ua)$. 进而，再由 $r(a) = r(b)$ 知存在 $v \in R$ 使得

$$r(b - sa) \subset r(b - sa - vua) = r(b - (s + vu)a),$$

这表明 I 真包含于 $r(b - (s + vu)a)$, 这与 I 的极大性矛盾. 因此 $I = R$.

(8) 对任意左理想 L, 我们有 $lr(L)=L$. 事实上, 若 $a\in lr(L)$, 则 $r(L)\subseteq r(a)$, 因此存在 $b\in L$ 使得 $r(a)=r(b)$, 进而存在 $s\in R$ 使得 $a=sb$, 故 $a\in L$. 由此可知 $lr(L)=L$.

因为定理的条件是左右对称的, 所以上面结论对左零化子和右理想也成立. 事实上, 对右理想 A, 也有 $A=rl(A)$. 因而 R 为满座双边零化子条件的环. 由此可知 $_RR$ 与 R_R 都是内射模, 因此都为余生成元, 即证得环 R 为双边 PF- 环. **证毕**.

推论 7.2.1 环 R 为双边 PF- 环当且仅当正则模 $_RR$ 与 R_R 都是线性紧的, 有限余生成的, 并且对任意具有有限合成长度的模 M 有 $\mathrm{leng}(M)=\mathrm{leng}(M^*)$.

我们知道 QF- 环的原始定义是 Nakayama 利用 Nakayama 置换给出的, 对于双边 PF- 环也有类似于 Nakayama 置换的性质.

推论 7.2.2 设 R 为任意环使得正则模 $_RR$ 与 R_R 都是线性紧的, 有限余生成的. 则以下条件等价

(1) R 为双边 PF- 环;

(2) 对任意本原幂等元 e, 模 Re 和 eR 的基座 $Soc(Re)$ 和 $Soc(eR)$ 都是单模, 并且所有单左 R- 模和单由 R- 模在 $Soc(_RR)$ 和 $Soc(R_R)$ 中都分别有非零同态像;

(3) 对任意本原幂等元 e, 模 Re 和 eR 的基座 $Soc(Re)$ 和 $Soc(eR)$ 都是单模, 并且 $Soc(_RR)=Soc(R_R)$;

(4) 对于本原正交幂等元的完备集 $\{e_1,\cdots,e_n\}$, 存在指标集 $\{1,\cdots,n\}$ 的 Nakayama 置换 π 使得

$$Soc(e_i)\cong\overline{e_{\pi(i)}}\overline{R}, Soc(Re_{\pi(i)})\cong\overline{R}\overline{e_i},$$

其中 $\overline{R}:=R/J$ 为商环.

1972 年, T. Onodera 曾给出了单边 PF- 环的利用线性紧性的单边刻画. 即: 环 R 为右 PF- 环当且仅当右正则模 R_R 为线性紧的余生成元 (见文献 [113]).

§7.3 *GPF*- 环

Azumaya[13], Osofsky[115] 和 Utumi[149] 已经各自独立地给出了环 R 是右 PF- 环当且仅当 R 是具有本质右基座的半完全环右自内射 (见定理 7.2.1). 1995 年, Nicholson 与 Yousif 合作 [108] 引入了广义 PF 的概念. 环 R 称为是右 **广义** PF(简称 GPF), 如果 R 是右 P- 内射半完全且 $Soc(R_R)$ 作为一个右理想是本质的. PF- 环的特征许多被推广到了 GPF- 环上.

在半完全环中, 一个极大的相互非同构本原幂等元集合称为一个幂等元基集. 一个左、右 Artin 环 R 称为 QF- 环 (见文献 [101] 和 [102]) 如果存在基幂等元 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的一个置换, 使得对每个 k, e_kR 包含惟一的一个同构

于 $e_{\sigma k}R/e_{\sigma k}J$ 的右理想，且 $Re_{\sigma k}$ 包含惟一的一个同构于 $Re_{\sigma k}/Je_{\sigma k}$ 的左理想. 这些环都是左、右自内射环.

定理 7.3.1 设 R 是一个基础幂等元集 $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 的右 GPF- 环. 则存在 R 中的非零元 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 和 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个置换 σ 使得对 $k = 1, 2, \cdots, n$. 下列条件成立:

(1) $Rt_k = Soc(Re_{\sigma_k}) \cong Re_k/Je_k$ 是 $Re_{\sigma k}$ 的单本质子模;

(2) $Soc(e_kR) \neq 0$ 是同构于 $e_{\sigma k}R|e_{\sigma k}J$ 的单子模;

(3) $Rt_1, Rt_2, \cdots, Rt_n$ 是单左 R- 模的完全代表类;

(4) $t_1R, t_2R, \cdots, t_nR$ 是单右 R- 模的完全代表类;

(5) $S_r = S_l = \sum_{k=1}^{n} Rt_kR$ 是 ${}_RR$ 和 R_R 的本质子模且是有限生成左 R- 模 (故 ${}_RR$ 是有限维的) ;

(6) Rt_kR 是 S_r 的包含 t_kR 的齐次分支且 Rt_kR 是 S_l 的包含 Rt_k 的齐次分支.

证明 对每个 $k = 1, 2, \cdots, n$, 取定一个单右理想. 对每个这样的选取，我们得如下的一个映射 $\sigma \in S_n$, 如果 $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$, 则 $T_k(ReR) \neq 0$, 于是对每个 $\sigma \in S_n$ 有 $T_ke_{\sigma k} \neq 0$. 取 $0 \neq t_k \in T_ke_{\sigma k}$, 则 $r(t_k) \supseteq J + (1 - e_{\sigma k})R$. 由于 $J + (1 - e_{\sigma k})R$ 极大，从而有 $r(t_k) = J + (1 - e_{\sigma k})R$.

如果 $0 \neq b \in Re_{\sigma k}$, 则 $(1 - e_{\sigma k})R \subseteq r(b) \neq R$, 故 $r(b) \subseteq J + (1 - e_{\sigma k})R = r(t_k)$. 因为 $J + (1 - e_{\sigma k})R$ 是 R 的包含 $(1 - e_{\sigma k})R$ 的极大右理想. 由于 R 是右 P- 内射, $Rt_k \subseteq Rb$, 于是有 $Soc(Re_{\sigma k}) = Rt_k$ 是 $Re_{\sigma k}$ 的单本质子模. 故映射 $x \longmapsto xt_k$ 是满同态，从而 $Re_k/Je_k \cong Rt_k$. 又如果 $\sigma k = \sigma m$, 则 $Rt_k = Rt_m$, 故 $k = m$. 于是 σ 是一个置换，(1) 得证.

而且 $Rt_1, Rt_2, \cdots, Rt_n$ 相互不同构，由于只有 n 个单左 R- 模同构类. 故 (3) 得证. 由命题 6.2.2 知若 $t_iR \cong t_jR$, 则 $i = j$, 对每个 k 有 $t_kR = T_k$ 是单模. 故 (4) 得证.

下证 (2), 取定 $1 \leqslant m \leqslant n$, 设 $S \subseteq e_mR$ 是单模. 由前面的证明知，存在 $m' \in \{1, \cdots, n\}$ 有 $Se'_m \neq 0$, 如果 $0 \neq s \in Se'_m$, 由 $x \mapsto xt_k$ 定义的映射: $e_{m'}R \to S$ 是满同态. 故 $S = e'_mR/e'_mJ$. 如果能证明 $m' = \sigma m$, 则 (2) 得证. 下证 $m' = \sigma m$. 对每个 k 取一个单右理想 $S_k \subseteq e_kR$, 若 $k \neq m$, 令 $S_k = T_k$, 并且 $S_m = S$. 由上一段的证明知存在一个置换 $\tau \in S_n$ 使得对所有的 k 都有 $S_ke_{\tau k} \neq 0$, 如果 $k \neq m$, 有 $\tau k = \sigma k$, $\tau m = m'$. 即证 $\sigma m = m'$.

下证 (6), $Soc_{t_kR}(R_R)$ 表示 S_r 的包含 t_kR 的齐次分支 (Homogeneous Component). 显然有 $Rt_kR \cong Soc_{t_kR}(R_R)$. 如果 $\phi : t_kR \to T$ 是同构，则 $T \subseteq R$. 令 $t = \phi t_k$, 有 $r(t) = r(t_k)$. 由于 R 是右自内射环有 $Rt = Rt_k$. 故 $T \subseteq Rt_kR$, 于是 $Soc_{t_kR}(R_R) = Rt_kR$. 另一方面，由 (1) 知 $Soc_{t_kR}(R_R) = Soc(Re_{\sigma k}) \oplus [\oplus_i Soc(Rf_i)]$,

其中 $Rf_i \cong Re_{\sigma k}$(任意 i). 于是存在 $b \in R$ 使得 $Rf_i \cong (Re_{\sigma k})b$. 由于 $Soc(Re_{\sigma k}) = Rt_k$, 于是 $Soc_{Rt_k}({}_RR) \subseteq Rt_kR$. 显然有 $Rt_kR \subseteq Soc_{Rt_k}({}_RR)$. 即证 (6).

最后证 (5). 由 (3) 、 (6) 和 (4) 有

$$S_l = \bigoplus_{k=1}^{n} Soc_{Rt_k}({}_RR) = \bigoplus_{k=1}^{n} Rt_kR = \bigoplus_{k=1}^{n} Soc_{t_kR}(R_R) = S_r.$$

由 (1) 知 S_l 是 ${}_RR$ 的有限生成的本质子模.
由定理 7.3.1(3) 和 (4) 知右 GPF- 环 R 是双边 Kasch 环. **证毕**

命题 7.3.1 设 R 是右 GPF- 环且有 $S = S_l = S_r$. 则

(1) $Z_r = J = Z_l$;

(2) $l(S) = J = r(S)$;

(3) $l(J) = S = r(J)$.

证明 (1) 由于 R 是右半完全环有 $Z_l \subseteq J$. 设 $a \in J$, 由于 R 是半局部环有 $l(a) \supseteq l(J) = S$. 又由定理 7.3.1(5) 知 S 是 ${}_RR$ 的本质子模. 于是 $a \in Z_l$. 故 $J = Z_l$. 由命题 7.2.3 知 $Z_r = J = Z_l$.

(2) 显然有 $JS = 0 = SJ$, 从而有 $J \subseteq r(S)$. 又因为 S 分别是 ${}_RR$ 和 R_R 的本质子模, 由 (1) 知 $J \supseteq r(S)$, $l(S) \subseteq J$, $J \subseteq l(S)$. 故 $l(S) = J = r(S)$.

(3) 因为 R 是半局部环, 所以有 $l(J) = S = r(J)$.

接下来我们给出右 GPF- 环为左 GPF- 环的条件. **证毕**

命题 7.3.2 设 R 为右 GPF- 环. 若 R 为右 2- 内射环, 则 R 为左 GPF- 环.

证明 因为 R 为右 GPF- 环, 故 $Soc({}_RR) = Soc(R_R)$ 为 ${}_RR$ 本质子模. 下证 R 为左 P- 内射环. 为此, 令 I 为主右理想, 并任取 $b \in rl(I)$, 由定理 7.3.2 我们需证 $b \in I$. 假设 $b \notin I$, 则由 I 为主右理想知存在 $M \leqslant bR + I$ 使得 M/I 为 $(bR+I)/I$ 的极大子模. 又由 R 为右 GPF- 环知 R 为右 Kasch 环, 从而存在单同态 $\sigma : (bR+I)/I \to R_R$. 若定义 $\gamma : bR + I \to R$ 为 $\gamma(x) = \sigma(x + M)$, 则由 R 为右 2- 内射环知存在 $c \in R$ 使得 $\gamma = c$, 因而 $cb = \sigma(b + M) \neq 0$. 另一方面, 由 $I \subseteq M$ 知 $cI = 0$, 再由 $b \in rl(I)$ 可得 $cb = 0$, 矛盾. **证毕**

命题 7.3.3 设 R 是右 GPF- 环, 则

(1) 如果 T 是 R 一个极大右理想, 则 $T = r(K)$ 其中 K 是一个极小左理想. 特别地, $T = rl(T)$.

(2) 如果 K 是 R 一个极小左理想, 则 $K = l(T)$, 其中 T 是一个极大右理想.

证明 (1) 设 $\sigma : R/T \to t_kR$ 是一个同构. T_k 与定理 7.3.1 中的相同. 则 $T = r(Ra)$ 其中 $a = \sigma(1 + T)$. 由于 $aR = t_kR$, 由命题 6.2.2 知 $Ra \cong Rt_k$ 是单模. 其余部分由定理 7.2.1 知.

(2) 令 $T = r(K)$, $T \subseteq T'$(T' 是一个极大右理想). 由 (1) 知 $T' = r(K')$ 其中 K'

是单右理想. 于是有 $r(K) \subseteq r(K')$, 由定理 7.2.1 知 $K = K'$. 故 $T = T'$ 是极大右理想. 又由定理 7.2.1 知 $K = lr(K) = l(T)$.

由此可知每个右 GPF- 环都是右 P- 内射的双边 Kasch 环. 下面我们研究右 P- 内射右 Kasch 环的性质.　　**证毕**

命题 7.3.4　设 R 为右 P- 内射的右 Kasch 环, 其 Jacobson 根 $J = Rad(R)$. 则 $l(J)$ 为 $_RR$ 的本质子模.

证明　任取 $0 \neq b \in R$, 则循环模 bR 存在极大子模 M. 再由 R 为右 Kasch 环知可得单同态 $\sigma : bR/M \to R_R$. 若定义映射 $\alpha : bR \to R$ 为 $\alpha(x) = \sigma(x + M)$, 则由 R 为右 P- 内射环知存在 $c \in R$ 使得 $\alpha = c\cdot$, 故 $cb = \sigma(b + M) \neq 0$. 但是由 $bJ \subseteq M$ 知 $cbJ = \sigma(bJ) = 0$, 故 $0 \neq cb \in Rb \bigcap l(J)$, 即证 $l(J)$ 为 $_RR$ 的本质子模.

定理 7.3.2　设 R 为半完全的右 P- 内射环. 则以下条件等价:

(1) R 为右 Kasch 环;

(2) $Soc(R_R)$ 为 $_RR$ 的本质子模.

在此条件下 $Soc(_RR) = Soc(R_R)$, 并且 $Z(_RR) = J = Z(R_R)$.

证明　(1)⇒(2). 因为 R/J 为半单环, 故 $Soc(R_R) = l(J)$. 再由命题 7.3.5 知 $Soc(_RR)$ 为 $_RR$ 的本质子模.

(2)⇒(1). 设 M 为环 R 的极大理想. 因为 R 为半完全环, 故存在幂等元 $e^2 = e \in R$ 使得 $1 - e \in M$, 并且 $eR \bigcap M \subseteq J$. 由此可知

$$l\,(eR \bigcap M) \supseteq l(J) \supseteq Soc(R_R),$$

故由假设知 $l(eR \bigcap M)$ 为 $_RR$ 的本质子模. 特别地有

$$0 \neq Re \bigcap l\,(eR \bigcap M) = l((1 - e)R \oplus (eR \bigcap M)) = l(M),$$

即证 R 为右 Kasch 环.

由 (2) 可知 $Soc(R_R) \subseteq Soc(_RR)$. 再由 R 为由 P- 内射环知 $J = Z(R_R)$, 进而 $Soc(R_R) \subseteq r(J)$. 又为 R/J 为半单环, 故 $Soc(R_R) = l(J)$. 因此 $Soc(_RR) = Soc(R_R)$.

因为 R 为半完全环, 故 $Z(_RR) \subseteq J$. 又由 (2) 知 $l(J) = Soc(R_R)$ 为 $_RR$ 的本质子模, 因而 $J \subseteq Z(_RR)$. 最后, 由 R 为由 P- 内射环知 $J = Z(R_R)$,　　**证毕**.

推论 7.3.1　设 R 为半完全的双边 P- 内射环. 若 R 为单边 Kasch 环, 则 R 为双边 GPF- 环.

证明　若 R 为右 Kasch 环, 则由定理 7.3.2 知 R 为右 GPF- 环. 因而由定理 7.3.1 知 R 为左 Kasch 环. 再由定理 7.3.2 知 R 为左 GPF- 环.　　**证毕**.

薛卫民 [167] 研究了右 P- 内射右 Kasch 环为半局部环的等价条件.

定理 7.3.3　设 R 是右 P- 内射, 右 Kasch 环. 则 R 是半局部环当且仅当 R 有有限左 Golide 维数. 在这种情形下有 $Soc(_RR) = Soc(R_R)$, 并且其 Goldie 维数

$$\dim_R R = \mathrm{leng}(_RR) = \mathrm{leng}(R/J)_R.$$

证明 假设 R 是半局部环. 如果 T 是一个极大理想, 则 $\mathrm{Hom}_R(R/T, R_R) \cong l(T)$ 是一个极小左理想 (见文献 [108]). 因此, 如果 M_R 是有限生成的半单右 R- 模, 则 $\mathrm{Hom}_R(M_R, R_R)$ 是有限生成的半单左 R- 模并且 leng $(\mathrm{Hom}_R(M_R, R_R))$ = leng (M_R). 我们知道 $\overline{R}_R = R/J$ 是有限生成的半单右 R- 模, 因此

$$Soc(R_R) = l(J) \cong \mathrm{Hom}_R(\overline{R}_R, R_R)$$

是有限生成半单的左 R- 模并且 $\mathrm{leng}({}_RSoc(R_R)) = \mathrm{leng}(\overline{R}_R)$. 因此 $Soc(R_R) \subseteq Soc({}_RR)$, 但是 $Soc(R_R) = l(J)$ 并且由文献 [107] 知 $Soc(R_R)$ 在 R_R 中是本质的. 从而有 $Soc(R_R) = Soc({}_RR)$. 所以 R_R 是有限维的并且其 Goldie 维数

$$\dim_R R = \mathrm{leng}({}_RSoc({}_RR)) = \mathrm{leng}({}_RSoc({}_RR)) = \mathrm{leng}(\overline{R}_R).$$

证毕

§7.4 Dischinger-Muller 的例子

根据著名的 Morita 定理, 环 R 具有自对偶当且仅当 R 为双边 PF- 环. 但是在相当长一段时间内, QF- 环是双边 PF- 环的仅有的例子. 因此, 单边 PF- 环的存在性就成为 Morita 对偶理论中的著名问题. 实际上, 关于 PF- 环的一个重要的问题就是左 PF- 环是否为右 PF- 环. 这个问题在 Azumaya 提出后很长一段时间内没有被解决. 1986 年, F. Dischinger W. Muller 构造了一个著名例子表明左 PF- 环不一定是右 PF- 环.

F.Dischinger W.Müller 的构造是基于 Faith 提出的右 PF- 环的平凡扩张的概念. 所以我们先介绍平凡扩张的概念. 设 M 是任意 (A, A)- 双模, 则我们可以构造 M 的通过 A 的平凡扩张代数 $A \times M$, 其乘法定义为

$$(a, m) \cdot (a', m') = (aa', am' + ma'), \quad \forall a, a' \in A, \quad m, m' \in M$$

例 7.4.1 设 $R = K[[x, \alpha]]$ 是域 K 上的 **扭转 (twisted) 幂级数环** (即对任意 $k \in K$, $i \geqslant 0$, 有 $x^i k = \alpha^i(k) x^i$), 其中 $\alpha : K \to K$ 是域自同态使得 $\alpha(k)$ 是一个维数 $\dim_k \alpha(k) = n < \infty$ 的子域. 则环 R 通过其极小左 R - 余生成元 ${}_RE$ 的平凡环扩张 $S = R \times_R E_R$ 是左 PF- 环, 但不是右 PF- 环.

证明 我们选择 K 的一个 $\alpha(K)$- 子空间 U 使得

$$K = \alpha(K) \oplus U,$$

并记相应的投射为 $\pi : K \to \alpha(K)$. 在此等式的右边用 K 迭代替换可得

$$K = \alpha^i(K) \oplus \alpha^{i-1}(K) \oplus \cdots \oplus \alpha^0(U),$$

如果我们任意选择 $0 \neq v_i \in \alpha^{i-1}(U)$, 则循环右理想 $v_i x^i R \cong R_R$ 是自由模，并且其和是直和．从而下面的右理想

$$I_R := \sum_{i=1}^{\infty} v_i x^i R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} v_i x^i R \cong \bigoplus_{i=1}^{\infty} R_R$$

是具有可数基的自由 R- 模.

另一方面，因为 R 中惟一的可逆元素就是形如 $\sum_{i=0}^{\infty} k_i x^i (k_0 \neq 0)$, 所以下面的降链

$${}_R R \supset Rx \supset Rx^2 \supset \cdots$$

包含所有的非零理想．从而 ${}_R R$ 为单列 (uniserial) 左 R- 模.

现在我们考虑集合

$$E := [x^{-1}]K = \left\{ \sum_{i=0}^{n} x^{-i} k_i | k_i \in K, n \in N \right\},$$

对任意 $k \in K$, $i \in N$, 由计算可得

$$kx^{-i} = x^{-i} \alpha^i(k),$$

因此， $x^0, x^{-1}, x^{-2}, \cdots$ 组成 E 的一组 K- 基．并且，通过下面乘法运算

$$(k_j x^j) \cdot (x^{-i} k_i) := \begin{cases} 0, & \text{若 } i < j \\ x^{-i+j} \alpha^{i-j}(k_j) k_i, & \text{否则} \end{cases}$$

的加法扩张， E 具有左 R- 模结构．同时，若令加法同态 $\beta := \alpha^{-1}\pi$, 则 E 的右 R-模结构的模运算可由下面的运算诱导

$$(x^{-i} k_i) \cdot (k_h x^h) := \begin{cases} 0, & \text{若 } i < h \\ x^{-i+h} \beta^h(k_i k_h), & \text{否则,} \end{cases}$$

为此，只需注意到对任意 $k, k' \in K$ 有

$$\beta^i(k' \cdot \alpha^i(k)) = \beta^i(k')k.$$

由此可见 E 具有双 R- 模结构.

显然易见 E 的左右基座相等并且为 E 的本质子模:

$$Soc({}_R E) = x^{-0} K = Soc(E_R) \subseteq_e E,$$

由 Baer 准则可知 ${}_R E$ 为内射模．所以 ${}_R E$ 为极小左内射余生成元.

另一方面，右 R- 模 E_R 是单列模，其每个子模都由某个 x^{-i} 生成. 同时，$E_R := \bigcup_{i=0}^{\infty} x^{-i}R$ 是可数生成的，但不是有限生成的. 因此，存在典范满同态

$$I_R := \sum_{i=1}^{\infty} v_i x^i R = \bigoplus_{i=1}^{\infty} v_i x^i R \to E_R := \bigcup_{i=0}^{\infty} x^{-i}R$$

不能提升成满同态

$$R_R \to E_R,$$

所以显然有 E_R 不是内射模.

现在，我们将证明 E 的每个左 R- 自同态都能表为某个元素 $r \in R$ 的右乘. 我们考虑下面的右 K- 同态

$$\mu : R \to End(E_R), r \to - \cdot r,$$

因为 E_R 为忠实模，所以 μ 为单同态. 再考虑下面的右 K- 同态

$$\varphi : End({}_RE) \to Hom_K({}_KE, {}_KK), \quad f \to \lambda f,$$

其中 $\lambda : E \to K$ 为如下定义的 Frobenius 同态

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^{-i}k_i \to k_0,$$

因为 $\lambda(SocE_R) \neq 0$, 并且若 $f \neq 0$ 则 $Soc(E_R) \subseteq Im(f)$, 所以 φ 也为单同态. 同时，我们有自然同构

$$\psi : Hom_K\left(\bigoplus_{i=0}^{\infty}({}_K(x^{-i}K), {}_KK)\right) \to \prod_{i=0}^{\infty} Hom_K({}_K(x^{-i}K), {}_KK).$$

注意到对任意自然数 $h > 0$, 右 K- 向量空间 Kx^h 与 $Hom_K({}_K(x^{-h}K), {}_KK)$ 有相同的维数 n^h. 考察下面的由 K- 单同态 $\rho : Kx^h \to Hom_K({}_K(x^{-h}K), {}_KK)$, 其定义为

$$\rho : kx^h \to (x^{-h}k' \mapsto \beta^h(k'k)),$$

则 $\rho : Kx^h \to Hom_K({}_K(x^{-h}K), {}_KK)$ 的限制可以诱导合成同态 $\psi\varphi\mu$. 所以，合成同态 $\psi\varphi\mu$ 为满同态. 进一步，可以知道同态 $\psi\varphi\mu$, $\varphi\mu$ 和 φ 都是同构. 因此自然同态

$$\mu : R \to End(E_R), \quad r \to - \cdot r$$

也为同构.

最后一步就是平凡环扩张 $S = R \times_R E_R$ 的构造. 易知平凡环扩张 $S = R \times_R E_R$ 为左 PF- 环当且仅当 $_RE$ 是内射余生成元并且 R 与 $End(_RE)$ 之间存在自然同构. 环 R 通过其极小余生成元 $_RE$ 的平凡环扩张, $S = R \times_R E_R$ 是左 PF- 环, 但不是右 PF- 环. **证毕.**

注记 1. 值得指出的是, Dischingerde-Muller 例子中的平凡环扩张 $S = R \times {}_RE_R$ 既不是左完全环也不是右完全环, 因为实际上其 Jacobsin 根不是诣零的.

注记 2. 关于 PF- 环还有许多推广工作, 例如, Nicholson 和 Yousif 在 [111] 中就引入了 FP- 环. 一个环 R 称为右 FP- 环, 如果 R 为半完全右 FP- 内射并且 $Soc(R_R)$ 为本质右理想. 我们在下节专门讨论 FP- 环的一些重要性质. 陈建龙在其博士论文中又将右 FP- 环中右 FP- 内射性削弱, 用右 f- 内射代替, 引入了称为 GFP 的环类. 得到了许多有趣的结果.

§7.5 FP- 环

在 7.3 节, 给出了 PF- 环的一种推广即 GPF- 环. 在本节中我们来讨论 FP- 环的一些重要性质, 这类环也是 PF- 环的一种推广.

首先我们来讨论一些有关 FP- 自内射环的结果. 有关 FP- 自内射环的概念我们在第 6 章 6.1 节中已经提及, 为了本章的需要, 我们再次提及.

定义 7.5.1 环 R 称为右 FP- 自内射环, 若对从自由右 R- 模 F 的任意的有限生成子模到 R 的 R- 模同态都能拓展到 F 上. 实际上, 这个定义等价于 $Ext^1_R(P, R) = 0$, 对任意有限表现的左 R- 模 P 成立.

引理 7.5.1 设 $_RM_S$ 为双模, 对 $_RK(\subseteq_R M)$, 有下列显然成立的等价命题:

(1) 若 $r_S(K) \subset r_S(m)$, 则 $m \in K$;

(2) $l_M r_S(K) = K$;

(3) 存在 S 的子集 X 满足: $K = l_M(X)$.

下面我们利用矩阵的语言给出 FP- 自内射环的特征刻画.

定理 7.5.1 对于环 R 下列条件等价:

(1) R 是右 FP- 自内射环;

(2) 若 $\bar{b} \in R^n$, $A \in M_n(R)$ 满足 $r_{R_n}(A) \subseteq r_{R_n}(\bar{b})$, 那么存在 $\bar{x} \in R^n$ 有 $\bar{b} = \bar{x}A$;

(3) 若 $\bar{b} \in R^n$, $A \in M_{m\times n}(R)$ 满足 $r_{R_n}(A) \subseteq r_{R_n}(\bar{b})$, 那么存在 $\bar{x} \in R^m$ 有 $\bar{b} = \bar{x}A$;

(4) 若 $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}, \cdots$, $\overline{a_m}$, $\bar{b} \in R^n$ 满足 $\bigcap_i r_{R_n}(\overline{a_i}) \subseteq r_{R_n}(\bar{b})$, 那么 $\bar{b} \in \Sigma_i R\overline{a_i}$;

(5) 若 $n \geqslant 1$, $_RK(\subseteq R^n)$ 是有限生成的, 那么存在 $X \in M_n(R)$ 有 $K = l_{R^n}(X)$;

(6) 对任意的 $n \geqslant 1$,$M_n(R)$ 是右 P- 内射环.

证明 (1)⇒(2). 若 $r_{R_n}(A) \subseteq r_{R_n}(\bar{b})$, 设 $\underline{c}_j$ 表示 A 中第 j 列, 那么 $AR_n = \Sigma_j \underline{c}_j R$

是 R_n 的有限生成子模, 且由假设知: $\alpha: AR_n \to R_R, \alpha(A\underline{r}) = \overline{b}\underline{r}$, 所以由 (1) 有: $\alpha = \overline{x}$ $(\exists \overline{x} \in R^n)$. 若写 $\overline{b} = [b_1, b_2, \cdots, b_n] \in R^n$, 我们得到 $b_j = \overline{b}\underline{e}_j = \alpha(A\underline{e}_j) = \alpha(\underline{c}_j) = \overline{x}\underline{c}_j$, 其中 $\underline{e}_j$ 为 R_n 的标准基. 因此 $\overline{b} = [\overline{x}\underline{c}_1, \overline{x}\underline{c}_2, \cdots, \overline{x}\underline{c}_n] = \overline{x}[\underline{c}_1, \underline{c}_2, \cdots, \underline{c}_n] = \overline{x}A$.

(2)⇒(3). 设 $r_{R_n}(A) \subseteq r_{R_n}(\overline{b})$, A 是 $m\times n$ 阶. 若 $m = n$, 显然成立. 若 $m < n$, 设 $A' = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ 为 $n \times n$ 阶, 那么 $r_{R_n}(A') = r_{R_n}(A) \subseteq r_{R_n}(\overline{b})$, 所以存在某个 $\overline{y} = [\overline{x} \quad \overline{z}] \in R^n, \overline{x} \in R^m$ 满足 $\overline{b} = \overline{y}A' = [\overline{x} \quad \overline{z}]\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \overline{x}A$. 另一方面, 若 $m > n$, 设 $A' = [\ A \quad 0\ ]$ 为 $m \times n$ 阶, 那么我们有:

$$r_{R_m}(A') = \left\{ \begin{bmatrix} \underline{r} \\ \underline{s} \end{bmatrix} \middle| \underline{r} \in R_n, \underline{s} \in R_{m-n}, Ar = 0 \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} r_{R_n}(A) \\ R_{m-n} \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} r_{R_n}(\overline{b}) \\ R_{m-n} \end{bmatrix} = r_{R_m}[\ \overline{b} \quad 0],$$

由 (3) 中的条件, 存在 $\overline{x} \in R^n$ 满足 $[\ \overline{b} \quad 0\ ] = \overline{x}A' = [\ \overline{x}A \quad 0\ ]$, 因此 $\overline{b} = \overline{x}A$.

(3)⇒(1). 设 $K = \Sigma_{j=1}^m \underline{c}_j R \subseteq R_n$, R- 线性 $\gamma: K \to R_R$, $\gamma(\underline{c}_j) = b_j \in R$. 我们写 $\overline{b} = [b_1, \cdots, b_m] \in R^m$, $A = [\underline{c}_1, \cdots, \underline{c}_m] \in M_{n\times m}(R)$, 那么由 (3) 存在 $\overline{x} \in R^n$ 使得 $\overline{b} = \overline{x}A$, 因此对任意的 j 有 $b_j = \overline{x}\underline{c}_j$, 即 $\gamma = \overline{x}\cdot$.

(3)⇒(4). 设 $A = (\overline{a_i}) \in M_{m\times n}(R)$, 由 (4) 的条件有 $r_{R_n}(A) = \bigcap_i r_{R_n}(\overline{a}_i) \subseteq r_{R_n}(\overline{b})$. 根据 (3), 存在 $\overline{x} \in R^m$ 满足 $\overline{b} = \overline{x}A$. 若 $\overline{x} = [x_1, \cdots, x_m]$, 那么 $\overline{b} = \Sigma_i x_i R\overline{a}_i \in \Sigma_i R\overline{a}_i$.

(4)⇒(5). 设 $K = R\overline{a}_1 + \cdots + R\overline{a}_n \subseteq R^n$ 为 (5) 中的 K, 那么

$$r_{M_n(R)}(K) = \bigcap_i r_{M_n(R)}(\overline{a}_i),$$

由 (4) 有 $r_{M_n(R)}(K) \subseteq r_{R_n}(\overline{b})$, 所以 $b \in K$. 根据 $M =_R R^n_{M_n(R)}$ 和引理 7.5.1 我们就有 (5).

(5)⇒(6). 设 $(\overline{a_i}) = A \in M_n(R)$, $K = R\overline{a}_1 + \cdots + R\overline{a}_n \subseteq R^n$, 由 (5), 存在子集 $X \subseteq M_n(R)$ 使得 $K = l_{R^n}(X)$. 但是

$$A = \begin{bmatrix} K \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{R^n}(X) \\ \vdots \\ l_{R^n}(X) \end{bmatrix} = l_{M_n(R)}(X),$$

从而有 (6).

(6)⇒(2). 假设 $r_{R_n}(A) \subseteq r_{R_n}(\bar{b})$, B 为每行都等于 $\bar{b}$ 的方阵, 那么 $r_{R_n}(A) \subseteq x_{R_n}(B)$ 所以存在 $X \in M_n(R)$ 满足 $B = XA$. 因此 $\bar{b} = \bar{x}A$, 其中 $\bar{x}$ 为 X 的单位行阵. **证毕**

若 R 是右 P- 内射且满足 $ReR = R(e^2 = e \in R)$, 由文献 [108] 中定理 2.1 可知 eRe 也是 P- 内射的. 从而根据定理 7.5.1(6) 可得下面推论.

推论 7.5.1 右 FP- 自内射环在 Morita 等价下是不变的.

例 7.5.1 平凡扩张 $R = T(Z, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ 是交换的 FP- 内射环, 但不是自内射环.

证明 我们知道, 左 IF- 环是 Morita 不变的, 因此若 S 是 IF- 环, 则 $M_n(S)$ 也是 IF- 环, 又由于 Colby 证明了 IF- 环必为 P- 自内射环. 由定理 7.5.1 知道 ,S 是 (右)FP- 内射环. Colby 证明了 R 是交换的 IF- 环 (见文献 [36] 例 1), 因此它是 FP- 内射环. 但 $R/J \cong Z$ 不是正则环, 从而 R 不是自内射环. **证毕**.

定理 7.5.2 若 R 是右 Kasch 右 FP- 内射环, 则 R 是左 FP- 内射环.

证明 记 $S = M_n(R)$. 由推论 7.5.1 我们可知 S 是右 FP- 内射的, 右 Kasch 的. 由定理 7.5.1 我们只需证明对任意的 n 有: S 是左 FP- 内射的. 设 $y \in rl(xS)(x, y \in S)$, 那么我们只需表明 $y \in xS$. 假设 $y \notin xS$, 令 T 为包含 xS 的 $xS+yS$ 的极大右 S- 模. 由 Kasch 环的条件, 我们有嵌入映射 $\sigma : (xS+yS)/T \to S$. 定义 $\gamma : xS+yS \to S$, $\gamma(s) = \sigma(s+T)$.

因为 S 是右 FP- 内射环, 存在 $c \in S$ 使得 $\gamma = c\cdot$. 从而有 $cx = \gamma(x) = 0$, 所以 $c \in l(xS)$. 又因为 $y \in l(xS)$, 所以 $cy = 0$. 这与 $cy = \gamma(y) \neq 0$ 矛盾. **证毕**.

我们可以根据定理 7.5.2 提出一个有趣的问题: 右 Kasch 右 FP- 内射环是否一定是左 Kasch 环, 也就是说, 满足定理 7.5.2 的条件的这类环是否具有左右对称性.

定理 7.5.2 的逆命题不成立: 任意的正则非 Artin 环都是左右 FP- 内射环, 但它们既不是左 Kasch 环也不一定是右 Kasch 环. 从而由文献 [36] 中例 2 得知: 右 FP- 内射环不一定是左 P- 内射环.

定理 7.5.3 对于环 R 下列条件等价:

(1) R 是半完全, 右 FP- 内射环且 $S_r \subseteq_e R_R$;

(2) R 是半完全, 左 FP- 内射环且 $S_l \subseteq_e ({}_RR)$.

证明 (1)⇒(2). 由 (1) 和文献 [107] 中推论 2.3, R 是右 P- 内射且左 (右)Kasch 环. 因此由定理 7.5.2 知 R 左 FP- 内射. 若 $0 \neq a \in R$, $r(a) \subseteq T \subseteq^{\max} R_R$, 那么由 R 是右 P- 内射环有: $l(T) \subseteq lr(a) = Ra$, 即 $S_l \subseteq_e ({}_RR)$. 因为 R 是右 Kasch 环, 所以 $l(T) \neq 0$. 若 $0 \neq k \in l(T)$, 那么 $T \subseteq rl(T) \subseteq r(k)$, 即有 $T = r(k)$. 因此 $l(T) = lr(k) = Rk$. 这就表明 $l(T)$ 是单的. 即为 (2) 所求.

(2)⇒(1). 由 (1)⇒(2) 的证明过程的对称性可得. **证毕**.

我们环 R 称为 FP- **环**, 若 R 是半完全, 右 FP- 内射环且 $S_r \subseteq^{ess} R_R$. 因为半

完全环和右 KascK 具有 Morita 不变性，所以我们有

定理 7.5.4 FP- 环类在是 Morita 等价下是不变的.

命题 7.5.1 若 R 是 FP- 环，则：

(1) R 是左、右 Kasch 环； (2) $J = Z(R_R) = Z(_RR)$ 且 $S_r = S_l$； (3) R 是左、右有限嵌入；

(4) 对任意的有限生成的左理想 L 和右理想 T 有： $lr(L) = L$ 且 $rl(T) = T$；

(5) 对任意的幂等元 $e \in R$, $Soc(eR)$ 和 $Soc(Re)$ 是单的；

(6) 若 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 R 的基本幂等元集，那么存在 R 中元素 $k_1, \cdots, k_n$ 和 $\{1, \cdots, n\}$ 的 Nakayama 置换 σ 满足：

(a) $Rk_i = Soc(Re_{\sigma i}) \cong \dfrac{Re_i}{Je_i}$ 且 $k_iR = Soc(e_{\sigma i}R) \cong \dfrac{Re_i}{e_iJ}$；

(b) $\{k_1R, \cdots, k_nR\}$ 和 $\{Rk_1, \cdots, Rk_n\}$ 分别是单右，左 R- 模基本代表集.

证明 (1) 由定理 7.5.3 的证明可知.

(2) 由文献 [107] 中的定理 2.1 和 [184] 可得.

(3) 由文献 [184] 知 $S_r = S_l$ 是左右有限维的，由定理 7.5.3 可得 $S_r = S_l$ 在 R_R 和 $_RR$ 中是本质的.

(4) 由定理 7.5.1 的条件 5 可知.

(5),(6) 由文献 [184] 可知. **证毕.**

现在我们给出 FP- 环的一些十分有用的特征.

定理 7.5.5 对于环 R 下列条件等价：

(1) R 是 FP- 环；

(2) R 是半完全右 FP- 内射环且右 Kasch 环；

(3) R 是半完全左 FP- 内射环且左 Kasch 环；

(4) R 是半完全右 FP- 内射环且存在 $\{k_1, \cdots, k_n\} \subseteq R$ 满足： $J = r\{k_1, \cdots, k_n\}$；

(5) R 是半完全左 FP- 内射环且存在 $\{m_1, \cdots, m_n\} \subseteq R$ 满足： $J = l\{m_1, \cdots, m_n\}$.

证明 由定理 7.5.2 和定理 7.5.3 的证明可知 (1),(2) 和 (3) 是等价的.

(2)⇒(4). 因为 R 是右 Kasch 环，我们有 $J = r(S_r)$. 但由命题 7.5.1 有 R 是右有限生成维的，从而 $S_r = Rk_1 + \cdots + Rk_n (k_i \in R)$， k_iR 是单的. 因此我们有： $J = r(S_r) = r\{k_1, \cdots, k_n\}$.

(4)⇒(2). 设 K 为的单右 R- 模. 因为 R/J 是半单的，所 K 作为右 R/J- 模可以嵌入到 R/J 中，因此作为 R- 模的 K 可以嵌入到 R/J 中. 由条件 (4), R/J 可以嵌入到 $(R_R)^n$ 中，从而 K 可以嵌入到 $(R_R)^n$ 中，即可以嵌入到 R. **证毕.**

接下来我们利用 FP- 环来探讨一些有关 QF- 环基本性质.

引理 7.5.2 若 R 是 FP- 环，对任意的 $n \geqslant 1$ 有：

$$Soc_n(R_R) = Soc_n(_RR) = l(J^n) = r(J^n).$$

证明 由命题 7.5.1 有 $Soc_n(R_R) = Soc_n({}_RR) = S$. 因为 R/J 是半单的, $S = l(J) = r(J)$. 假设对某个 $k \geqslant 1$ 有: $Soc_k(R_R) = Soc_k({}_RR) = l(J^k) = r(J^k)$, 那么由 $Soc_{k+1}(R_R)/Soc_k(R_R)$ 是 R- 半单的有 $Soc_{k+1}(R_R) \subseteq l(J^{k+1})$. 另一方面, 若 $aJ^{k+1} = 0$ 那么 $aJ \subseteq Soc_k(R_R)$, 所以 $[aR + Soc_k(R_R)]/Soc_k(R_R)$ 是右 R- 半单的 (R/J 是半单的), 因此我们有 $aR \subseteq Soc_{k+1}(R_R)$, 从而 $Soc_{k+1}(R_R) = l(J^{k+1})$. $Soc_{k+1}({}_RR) = r(J^{k+1})$ 同理可得. 由 $l(J^k) = r(J^k)$, 我们容易得到 $l(J^{k+1}) = r(J^{k+1})$. **证毕**.

下面这个引理在 6.1 节已经给出, 下面给出另外一个证明.

引理 7.5.3 R 是右 FP- 内射环当且仅当任意的有限表现左 R- 模都是无挠的.

证明 假设 R 是右 FP- 内射环, R^n 的有限生成子模 ${}_RK = Ra_1 + \cdots + Ra_m$, 我们需证明存在嵌入映射 $R^n/K \mapsto ({}_RR)^I$, 即只需证: 若 $b \in R^n$, $b \notin K$, 必定存在 $\gamma : R^n \to_R R$ 满足 $K\gamma = 0$ 且 $b\gamma \neq 0$.(反正) 假设上述条件不存在, 则 $\bigcap_{i=1}^m r_{R_n}(a_i) = r_{R_n}(K) \subseteq r_{R_n}(b)$, 由定理 7.5.1(4) 知 $b \in K$(与假设矛盾).

反过来, 若任意的有限表现左 R- 模都是无挠的, 由定理 7.5.1(4) 我们假设 $\bigcap_i r_{R_n}(a_i) \subseteq r_{R_n}(b)$, 令 ${}_RK = \sum_i Ra_i$. 若 $b \notin K$, 则有 $\gamma : R^n \to_R R$ 使得 $K\gamma = 0$ 且 $b\gamma \neq 0$. 但是 $\gamma = \cdot c (\exists c \in R_n)$, 从而有 $c \in r_{R_n}(K) = \bigcap_i r_{R_n}(a_i) \subseteq r_{R_n}(b)$. 因此, $0 = bc = b\gamma$, 从而矛盾. **证毕**.

下面我们给出 FP- 环的 Jacobson 根为有限生成的等价刻画.

命题 7.5.2 若 R 是 FP- 环, 则 $R/Soc(R)$ 作为右 R- 模能被有限嵌入当且仅当 J 作为左 R- 模是有限生成的.

证明 记 $S = S_r = S_l$. 因为 S_R 是有限生成的 (命题 7.5.1), 由引理 7.5.3,R/S 是右无挠的 (当 R 是左 FP- 内射环时). 若 R/S 能被有限嵌入, 由文献 [2] 中命题 10.2 和命题 10.7 知: 对某个 $n \geqslant 1$, 存在嵌入映射 $\sigma : R/S \to (R^n)_R$. 若 $\sigma(1+S) = (a_1, \cdots, a_n)$, $a_i \in R$, 那么 $S = r\{a_1, \cdots, a_n\}$. 因为 R 是右 FP- 内射环, 我们有 $l(S) = lr\{a_1, \cdots, a_n\} = \sum_{i=1}^n Ra_i$(定理 7.5.1(5)). 又因为 R 是左 Kasch 环, 故 $J = l(S)$. 即有: $J = \sum_{i=1}^n Ra_i$.

反过来, 若 ${}_RJ$ 是有限生成的, 那么 $S = r\{a_1, \cdots, a_n\}$, $a_i \in R$. 从而有嵌入映射 $R/S \to (R^n)_R$. 但 R 能被有限嵌入 (命题 7.5.1), 所以 $(R^n)_R$ 能被有限嵌入. 因此 R/S 能被有限嵌入. **证毕**.

下面我们给出 W. K. Nicholson 和 M. F. Yousif 在 2001 年得到的一个结果, 实际上这个结果推广了我们在第 8 章要叙述的几个著名结果:

定理 7.5.6 设 R 是左完全右 FP- 内射环，则：

(1) R 是 QF- 环当且仅当 $Soc_2(R)$ 是有限生成的右 R- 模；

(2) R 是 QF- 环当且仅当 $R/Soc(R)$ 作为左 R- 模能被有限嵌入；

(3) 若 R 是右完全环，R 是 QF- 环当且仅当 $Soc_2(R)$ 是有限生成的左 R- 模.

证明 因为左完全有本质的右 Socle, 所以 R 是 FP- 环 (定理 7.5.3). 对于 (1),(2),(3) 中的"必要性"，我们可以在文献 [109] 中得到，在这里省略其证明. 下证明他们的"充分性".

(1) R 是右半 -Artin 环 (因为 R 是左完全环), 所以 $R/Soc(R)$ 有本质的右 Socle. 因为 $Soc_2(R)$ 是有限生成的，$R/Soc(R)$ 作为右 R- 模能被有限嵌入，因此 $_RJ$ 是有限生成的 (命题 7.5.2). 由文献 [115] 引理 11 有：R 是左 Artin 环. 从而 R 是 QF- 环.

(2) 命题 7.5.2 表明 J_R 是有限生成的，所以，由文献 [115] 引理 11 有：R 是右 Artin 环. 由 R 是左，右极小内射环和文献 [184] 命题 4.8, 所以 R 是 QF- 环.

(3) 因为 R 是右完全，R 是左半 -Artin 环，即 $R/Soc(R)$ 有本质的左 Socle. 因此 $R/Soc(R)$ 能被有限嵌入. 由 (2) 可得 R 是 QF- 环. **证毕.**

第 8 章　quasi-Frobenius 环的三大猜想

在 quasi-Frobenius 环的漫长研究岁月里，逐渐提炼出由著名环论学者 Carl Faith 等提出的三个猜想，一个是 1982 年提出的，内容为 "如果环 R 的每个循环右 R- 模可嵌入自由模中，则 R 为左 Artin 环"(简称为 CF 猜想), 与这个猜想相关的猜想是 "如果每个有限生成的左 R- 模可嵌入自由模，则环 R 为 quasi-Frobenius 环" (简称 FGF 猜想). 这两个问题是具有包含关系的，如果 CF 猜想得到证明， FGF 就自然成立了，所以我们把它们归结为一个问题. 第二个猜想称为 Faith-Menal 猜想，于 1994 年正式提出，其最简形式为 "右 Noether 左 FP 内射环为 QF- 环". 第三个是 "完全单边自内射环为 quasi-Frobenius 环", 这个问题是 Carl Faith 于 1990 年正式提出的，其实，它的最初形式是： "半准素的单边 PF- 环是 QF- 环", 出现在 Carl Faith 的著作中 Algebra II(Ring Theory) 中. 这三个猜想使环论学者备受煎熬，听圈内人士透露， Carl Faith 本人还为他提出的这三个问题悬赏. 我们在本章系统地总结了这三个猜想的最新进展，我们从中可以深深地体会到代数学家们不畏艰险，独辟他径的敢于挑战极限的勇气，也可以欣赏到他们获得的一个个优美的数学定理.

我们特别强调一下，令环 R 的 Jacobson 根为 J, 其右 (左) 奇异理想为 $Z_r(Z_l)$.

§8.1　模的嵌入问题 : CF 与 FGF 猜想

模的嵌入问题可以追溯到 1963 年 Levy 关于 Ore 环的研究. 自从 1982 年 Faith 提出 " CF 猜测" 以来，较长时间内一直没有本质进展. 1998 年 Gomez-Guil 给出了 FGF 猜想的综述报告以后，才激发了大量的研究.

我们知道环 R 为 QF- 环当且仅当每个右 R- 模可以嵌入自由右 R- 模中当且仅当每个内射右 R- 模可以嵌入投射模中. 这启发我们给出下面的定义.

定义 8.1.1　环 R 称为右 FGF- 环，如果每个有限生成右 R- 模均可以嵌入自由模. 环 R 称为右 CF- 环，如果每个循环右 R- 模均可以嵌入自由模.

显然右 FGF 环为右 CF- 环. 需要指出的是存在非 FGF- 环的 CF- 环，这类环的典型例子是通过 Faith 曾经研究过的具有三个右理想的非 Noether 局部环来构造的.

S.K.Jain 和 S.R.lopez-Permouth 在 1990 年给出了下列例子.

例 8.1.1　设 S 为只有 3 个理想的局部环 (R, J). 设 $R=(S, S)$ 为 S 的平凡

扩张. 则:

(1) 环 R 为 CF 环;

(2) 若 S 不是右自内射环, 则 R 不是自内射环.

证明 (1) 令 $J = RadS := xS$, 则环 R 的理想格为

$$R = (S,S)$$
$$|$$
$$RadR = (J,S)$$
$$/ \quad \vdots \quad \backslash$$
$$R\ (J,J) \qquad \{K_u\} \qquad (,S)$$
$$\backslash \quad \vdots \quad /$$
$$Soc(R) = (0,J)$$
$$|$$
$$0$$

其中 $K_u = (x,u)R, u \notin J$. 由此可得:

1. 商环 $R/RadR \cong (0,J) \triangleleft R$;
2. $R/(0,S) \cong (0,S) \triangleleft R$;
3. $R/(J,J) \cong (J,J) \triangleleft R$;
4. 因为 $(0,J) = (0,x)R = r_R((0,1),(x,0))$, 故 $R/(0,J) \triangleleft R \times R$;
5. $R/K_u \cong K_{-u}$, 从而可定义本质单同态 $R/K_u \cong K_{-u} \to R$

$$为 1 + K_u \mapsto (xu^{-1}, -1).$$

这表明每个循环 R- 模都可以本质地嵌入正则模 R_R. 因此 R 为 CF- 环.

(2) 由 [48] 的一个定理可知结论成立. **证毕.**

为方便引用, 现给出 CF- 环的内刻画.

引理 8.1.1 环 R 为右 CF- 环当且仅当 R 的每个右理想均为 R 的有限子集的零化子.

证明 必要性. 设 I 为右理想, 若循环模 R/I 可以嵌入某自由模 R^n, 即有短正合列

$$0 \to R/I \xrightarrow{f} R^n.$$

记 $f(1_R) = (a_1, \cdots, a_n)$, 则易证 $I = r(Ra_1 + \cdots + Ra_n)$.

充分性. 如果 $I = r(Ra_1 + \cdots + Ra_n)$, 则可定义映射 $f : R/I \to R^n$ 为

$$f(r + I) = (ra_1, \cdots, ra_n),$$

则有常规验证可知 $f \in Hom_R(R/I, R^n)$, 并且易知 f 为单同态.　　**证毕.**

1982 年, Faith 提出了下面的著名的 FGF 猜想: 每右 FGF- 环为 QF- 环.

尽管吸引了大量的研究工作, FGF 猜想迄今为止远未解决.

这里需要注意的是 FGF 猜想实际上为单边问题. 这是因为双边 CF- 环为 QF- 环.

定理 8.1.1　设 R 为右 CF 环, 则以下条件等价:

(1) 每个有限生成左理想是 R 的一个有限子集的左零化子;

(2) R 为右完全环, 并且每个有限生成左理想都是零化子;

(3) 每个左理想都是零化子;

(4) R 为 QF- 环.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 由 Faith-Walker 的一个定理, 易知 R 为右 Noether 环. 设 I 为任意右理想. 则由 R 为右 CF- 环知存在元素 $x_1, \cdots, x_n \in R$ 使得 $I = r(Ra_1 + \cdots + Ra_n)$. 再由 (1) 知存在 $y_1, \cdots, y_m \in R$ 满足 $Ra_1 + \cdots + Ra_n = r\left(\sum_{i=1}^{m} y_iR\right)$. 因此 $I = rl\left(\sum_{i=1}^{m} y_iR\right) = \sum_{i=1}^{m} y_iR$ 是有限生成的. 因此 R 满足右零化子的升链条件, 或等价地, 满足左零化子的降链条件. 因此每个有限生成左理想都是零化子, 从而 R 满足有限生成左理想的降链条件. 由 Bass 定理知 R 为右完全环.

(2) $\Rightarrow$ (4). 首先我们证明每个左零化子都是有限生成左理想. 设 I 是左零化子, 则因为 R 为右 CF- 环, 故存在有限生成左理想 I_1 使得 $r(I) = r(I_1)$. 因为 I_1 有限生成, 所以 I_1 为零化子, 从而有 $I = lr(I)) = lr(I_1) = I_1$. 因为 R 为右完全环, 故 R 满足左理想的降链条件, 或等价地, R 满足右零化子的升链条件, 故 R 为右 Noether 环. 因此每个有限生成左理想都是 R 的一个有限子集的左零化子. 但是, 由著名的 Chase 定理知右完全右 Noether 环为右 Artin 环, 因此 R 满足左零化子的升链条件, 或等价地, 满足有限生成左理想的升链条件. 这表明 R 为左 Noether 环, 因此 R 实际上为左 CF- 环.

(3) $\Rightarrow$ (1). 由 (2)$\Rightarrow$(4) 的证明知每个左零化子左理想都是有限生成的, 因而 R 为左 Noether 环. 因此 R 满足右零化子的降链条件, 因此 R 为右 Artin 环. 故 R 也为右 Noether 环, 由此可知每个有限生成左理想是 R 的一个有限子集的的左零化子.　　**证毕.**

推论 8.1.1　任意双边 CF- 环为 QF- 环.

证明　这是定理 8.1.1 的直接推论.　　**证毕.**

由此自然要问单边 CF- 环是否为 QF- 环. 1970 年, Bjork 已经举例说明右 CF- 环未必为右 QF- 环. 但是, 迄今为止, 已知的右 CF- 环均为右 Artin 环. 于是有下面的猜想

CF 猜想：每个右 CF- 环为右 Artin 环.

首先我们研究半素环的情形.

命题 8.1.1 每个半素的右 CF- 环 R 为 QF- 环.

证明 事实上，我们将证明 R 为半单 Artin 环. 反证法，假定 R 包含一个本质真右 R- 理想 $E \neq R$. 不失一般性，我们可以假设 E 为 R 的极大右理想. 则 R/E 为奇异单右 R- 模. 因为 R 为右 CF- 环，所以 R/E 可以嵌入 R_R, 因此 R 包含一个极小右理想 I. 如果 $I^2 \neq 0$, 则存在 $x \in I$ 使得 $xI \neq 0$. 因此右其零化子 $r(x)\bigcap I \neq 0$. 但是这与 I_R 为奇异模矛盾. 因此 $I^2 = 0$, 这又与 R 为半素环矛盾. 因此不能包含本质真理想，这表明 R 为半单 Artin 环.

接下来我们研究每个循环模均可以本质地嵌入到一个投射模的情形. 这是 CF 猜想的一种十分重要的情形.

称环 R 为 (右)$\boldsymbol{QF}$**-3 环**, 如果右正则模 R_R 的内射包 $E(R_R)$ 作为右 R- 模是投射的. **证毕**.

定理 8.1.2 对任意环 R, 以下条件等价：

(1) R 为 QF- 环；

(2) 每个循环模的内射包投射；

(3) 每个循环模均可以本质地嵌入到一个投射模，并且 R 为 QF-3 环.

证明 (3) $\Rightarrow$ (1). 因为 $E(R)$ 投射，所以 $E(R)$ 的基座 $Soc(E(R))$ 与 R 的基座 $SocR$ 同构，即有 $Soc(E(R)) \cong SocR$. 下证 $R \cong E(R)$, 因此 R 为自内射环，故为 QF- 环.

因为 R 为 QF-3 环，所以我们有

$$R = e_1R\bigoplus\cdots\oplus e_nR,$$

其中 $\{e_1R,\cdots,e_kR|k \leqslant n\}$ 为不可分解右 R- 模的既约完全集. 令 $\{S_1,\cdots,S_k\}$ 为单右 R- 模的既约完全集. 因为每个单模 S_i 都是循环模，因此 S_i 可以本质地嵌入某个投射模 P, 而 P 一定为不可分解模，因此存在某个 $e_jR \cong P$. 因而我们可以定义 $\{S_1,\cdots,S_k\}$ 到 $\{e_1R,\cdots,e_kR|k \leqslant n\}$ 的映射 $f: S_i \mapsto e_jR$. 因此映射 f 一定为单射，从而为满射. 因此对每个不可分解投射模 e_jR, $Soc(e_jR)$ 为其惟一的本质单子模. 因此 $SocR \lhd R$, 由此可知 $Soc(E(R)) \lhd E(R)$.

现因为 R 为 QF-3 环，所以 R 为半完全环，因此存在指标集 A_i, $i = 1,\cdots,k$ 使得

$$SocR \cong \bigoplus_{i=1}^{k}(e_iR)^{(A_i)}.$$

同理，存在 $B_i, i=1,\cdots,k$ 满足

$$Soc(E(R)) \cong \bigoplus_{i=1}^{k}(e_iR)^{(B_i)},$$

由此，我们有

$$\bigoplus_{i=1}^{k}(e_iR)^{(A_i)} \cong \bigoplus_{i=1}^{k}(e_iR)^{(B_i)}.$$

由 Krull-Schmidt-Azumaya 定理知，存在 A_i 到 B_i 别的双射，因此 $R \cong E(R)$.

证毕.

下面我们将证明每个循环右 R- 模可以本质地嵌入一个投射模的环 R 是右 Artin 环. Pardo-Aensio 的这个结果很好地逼近了 CF 猜想. 为证此定理，我们需要一系列引理.

引理 8.1.2　设 R 为任意环，E_R 为内射模，并令 $S=End_R(E)$, $J=RadS$. 则存在从 E_R 的不可分解直和项同构类集合到 S/J 的极小理想同构类集合的双射.

证明　设 L_R 为 E_R 的任意直和项. 则有典范同构

$$Hom_R(E,L)\otimes_S E \cong L,$$

类似地，若 N_S 为 S_S 的任意直和项，则有典范同构

$$Hom_R(E, N\otimes_S E)\cong N,$$

因此，

$$L \mapsto Hom_R(E,L)\text{与}N \mapsto N\otimes_S E.$$

定义了 E_R 的直和项和 S_S 的直和项之间的双射. 并且，此双射保持不可分解性. 实际上，若 $e\in S$ 为相应于 E_R 的直和项 L_R 的幂等元，即 $L=eE\cong eS\otimes_S E$. 则相应的 S_S 的直和项为 $Hom_R(E,eE)\cong eS$. 因为 $End(eE_R)\cong eSe\cong End(eS_S)$, 所以若 E_R 的直和项 eE_R 不可分解，那么相应的 S_S 的直和项 eS 是不可分解投射模，并且其自同态环 $End(eS_S)\cong eSe$ 为局部环.

熟知 eSe 为局部环当且仅当 eS/eJ 为单右 S- 模，并且其投射盖恰好为 eS. 但是，作为右 S/J- 模，eS/eJ 同构于 S/J 的极小右理想 $\overline{eS}:=\overline{e}(S/J)$. 因此，若记 $\overline{S}:=S/J$, 则我们又可以将 eS 对应于此极小右理想 $\overline{eS}:=\overline{e}(S/J)$.

反之，因为 S/J 为 Von Neumann 正则环，并且模掉 Jacobson 根 J 后幂等提升，所以 S/J 的每个极小右理想都具有 $\overline{eS}:=\overline{e}(S/J)$ 的形式，其中 $e\in S$ 为幂等元. 因为我们又可以将 $\overline{eS}:=\overline{e}(S/J)$ 对应于 S 的极小右理想 eS.

至此，我们已经建立了 E_R 的不可分解直和项同构类集合到 S/J 的极小理想同构类集合的双射.　　　**证毕.**

为了能进行一些定量的计算，我们需要下面的定义.

定义 8.1.2 设 R 为任意环. 则称互不同构的单右 R- 模族 $\{C_k|k\in K\}$ 为单模的 **幂等正交族(幂等半正交族)**, 如果存在 R 的幂等元族 $\{e_k|k\in K\}$ 使得 $C_ke_k\neq 0$, 而当 $j\neq k$ 时有 $C_je_k=0(C_ke_j=0$ 或 $C_ke_j=0)$, 且对任意 $k\in K$.

引理 8.1.3 设 R 为 Von Neumann 正则右自内射环，并令 $\{C_i|i\in I\}$ 为 R 的互不同构的极小右理想集. 如果 I 为无限集合，则存在单右 R- 模的幂等正交族 $\{C_k|k\in K\}$ 使得指标集基数满足 $|I|<|K|$.

证明 对每个子集 $L\subseteq I$, 定义

$$\sum(L):=\{C\subseteq R_R|\text{存在}i\in L\text{使得}C\cong C_i\}$$

并令 $E(\Sigma(L))$ 为其内射包. 因为 R 为右自内射环，所以 $E(\Sigma(L))$ 可以嵌入 R_R, 故存在幂等元 $e_L\in R$ 使得 $E(\Sigma(L))\cong e_LR$. 首先证明 $e_L\in R$ 为中心幂等元.

接下来构造单右 R- 模的幂等正交族 $\{C_k|k\in K\}$. 设无限集 I 的子集的并所成的类为 K, 则由 Tarski 的一个引理知 K 满足:

(1) $|K|>|I|$；

(2) 对任意 $X,Y\in K$, 有 $|X|=|Y|$；

(3) 如果 $X\neq Y\in K$, 则有 $|X\bigcap Y|<|X|=|Y|$.

对每个子集 $X\subseteq I$, 我们有 $\Sigma(X)=\Sigma(X\backslash Y)\oplus\Sigma(X\bigcap Y)$, 从而有

$$E(\sum(X))=E(\sum(X\backslash Y))\bigoplus E\left(\sum\left(X\bigcap Y\right)\right),$$

因此有 $e_XR=e_{x\backslash Y}R\oplus e_{X\cap Y}R$. 由此我们有 $e_{X\bigcap Y}\in e_XR$, 类似地 $e_{X\bigcap Y}\in e_YR$, 进而有 $e_{X\bigcap Y}\in e_XR\bigcap e_YR\subseteq e_Xe_YR=e_Ye_XR$. 另一方面，若 C 为包含在 e_Xe_YR 中的单右 R- 模，则存在某个 $i\in X$ 使得 $C\cong C_i$, 类似地存在某个 $j\in X$ 使得 $C\cong C_j$. 因此 $C_i\cong C_j$, 故 $i=j\in X\bigcap Y$, 因而 $C\in\Sigma(X\bigcap Y)$. 又因为 e_Xe_YR 具有本质基座，所以 $e_Xe_YR\subseteq E(\Sigma(X\bigcap Y))=e_{X\bigcap Y}R$, 故有 $e_{X\bigcap Y}R=e_Xe_YR$. 由此可知 e_Xe_YR 为一个环，并且 e_Xe_Y 与 $e_{X\bigcap Y}$ 都是其单位元，因而 $e_{X\bigcap Y}=e_Xe_Y$.

现设 $N=\{e_ZR|Z\subseteq I,\text{且对任意}X\in K,\text{有}|Z|<|X|\}$, 并且对任意 $X\in K$ 定义 $N_X=(1-e_X)R+N$. 因为 e_X 和所有 e_Z 都是中心幂等元，所以 N 和 N_X 都是 R 的双边理想. 现假设 $e_X\in N_X$, 即存在 $x_0\in R$, $n\in N$ 使得 $e_X=(1-e_X)x_0+n$. 因此存在子集 $Z_1,\cdots,Z_R\subseteq I$ 满足 $|Z_j|<|X|$, 并且存在 $x_j\in R$ 使得 $n=\sum\limits_{j=1}^{r}e_{Z_j}x_j$.

因为 $|X|$ 无限，所以有

$$\left|\bigcup_{j=1}^{r}Z_j\right|<|X|,$$

因此存在 $i \in X\backslash\left(\bigcup_{j=1}^{r} Z_j\right)$. 但是，因为 $e_X R = (1-e_X)x_0R + \sum_{j=1}^{r} e_{Z_j}x_jR$, 所以 e_XR 不包含同构于 C_i 的子模，与 $i \in X$ 矛盾，这表明 $e_X \notin N_X$. 另一方面，如果 $X \neq Y \in K$, 则 $e_Y = (1-e_X)e_Y + e_Xe_Y = (1-e_X)e_Y + e_{X\bigcap Y}$. 又因为 $|X \bigcap Y| < |X|$ 对任意 $X \in K$ 成立，我们有 $e_{X\bigcap Y} \in N$, 从而 $e_Y \in N_X$.

现令 $M_X \leqslant R_R$ 为包含 N_X 的极大右理想. 因为 $e_Y \in N_X \subseteq M_X$, 所以对任意 $X \neq Y \in K$, 单右 R- 模 R/M_X 可被 e_Y 零化. 然而很清楚 $e_X \notin M_X$. 现对任意 $k \in K$, 令 $C_k := R/M_X$, 由此可以定义单右 R- 模的集合 $\{C_k|k \in K\}$, 且我们有 $C_ke_k \neq 0$, 并且对任意 $j \neq k \in K$ 有 $C_je_k = 0$. 进而，因为 e_k 为中心幂等元对任意 $k \in K$ 成立，因此 $C_j \cong C_k$ 蕴涵 $j = k$, 即证 $\{C_k|k \in K\}$ 为单右 R- 模的幂等正交族.　　**证毕.**

下面的引理对于 Pardo-Aensio 定理的证明是很关键的. 为方便起见，我们记单右 R- 模的同构类的代表集为 $\Omega(R)$.

引理 8.1.4　设 P_R 为有限生成投射右 R- 模，令 $E = E(P_R)$, 并令 $S = End_R(E)$, $J = RadS$. 假设 E_R 的每个循环子模都可以本质地嵌入一个投射模，则对任意为单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k|k \in K\}$, 存在从指标集 K 到单右 R- 模的同构类的代表集为 $\Omega(R)$ 的单射.

证明　因为 S/J 模掉 Jacobson 根 J 后幂等提升，我们可以考虑下面的幂等元族

$$\{s_k|\forall k \in K,\ C_k\overline{s_k} \neq 0,\ \text{且}\forall k \neq j \in K,\ C_k\overline{s_j} = 0\},$$

则有 $C_ks_k \neq 0$, 并且对任意 $k \neq j$, 有 $C_ks_j = 0$. 对任意 $k \in K$, 令 $E_k := \mathrm{Im}s_k$, 并设 $i_k : E_k \to E$ 为典范单射. 则 E_k 为 E 的直和项，因此 E_k 为内射模. 对任意 $k \in K$, 令 $c_k \in C_k$ 满足 $c_ks_k \neq 0$, 并设 $p_k : S_S \to C_k$ 为由 $p_k(1_S) = c_k$ 定义的右 S- 模同态，则 $p_k(s_k) \neq 0$.

我们断言 $(p_k \otimes_S E) \circ s_k \neq 0$. 为简化符号，我们记 $(-)_* := Hom_R(E, -)$. 因此特别地有 $s_{k_*} = Hom_R(E, s_k)$ 为由 s_k 左乘定义的自同态. 因而 $p_k(s_k) = (p_k \circ s_{k_8})(1)$, 由此可见 $p_k \circ s_{k_*} \neq 0$, 故 $g := p_k \circ s_{k_*} : S \to C_k$ 为满同态. 因为 $s_{k_*} \otimes_S E = Hom_R(E, s_k) \otimes_S E \cong s_k$, 故为证$(p_k \otimes_S E) \circ s_k \neq 0$只需证明同态 $g \otimes_S E = (p_k \otimes_S E) \circ (s_{k_*} \otimes_S E) : E \to E \otimes_S C_k$ 非零. 为此令 $H = \ker g$, 则右 R-模正合列

$$0 \to H \to S \xrightarrow{g} C_k \to 0,$$

可以诱导下面的正合列

$$0 \to HE \to E \xrightarrow{g\otimes_S E} C_k \otimes_S E \to 0,$$

现假设 $HE = E$. 则因为 P 是 E 的有限生成子模，我们可以找到整数 $r \geqslant 0$ 及同态 $f : E^r \to E$ 使得 $P \subseteq \mathrm{Im} f$. 若以 $q_i : E \to E^r$, $i = 1, \cdots, r$ 代表典范内射，则有 $f \circ q_i \in H$. 现设 $\gamma : P \to E$ 为包含映射，则由 P 投射知存在同态 $\delta : P \to E^r$ 使得 $\gamma = f \circ \delta$. 进而因为 E^r 内射，所以存在 $\eta : E \to E^r$ 使得 $\eta \circ \gamma = \delta$. 因而有下面的交换图

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & \overset{\delta}{\swarrow} & \downarrow \gamma \\ E^r & \underset{f}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} & E \end{array}$$

因而有 $f \circ \eta \circ \gamma = f \circ \delta = \gamma$, 故 $(1 - f \circ g) \circ \gamma = 0$. 因为 P 为 E 的本质子模，这表明 $Ker(1 - f \circ \eta)$ 为 E 的本质子模，因而 $1 - f \circ \eta \in J$, 故 $f \circ \eta$ 为同构. 若记 $p_i : E^r \to E$ 为典范投射，则有

$$f \circ \eta = f \circ \left(\sum_{i=1}^{r} q_i \circ p_i \right) \circ \eta = \sum_{i=1}^{r} ((f \circ q_i) \circ (p_i \circ \eta)) \in H,$$

因此一定有 $H = S$, 矛盾. 由此即证明了 $g \otimes_S E$ 为非零同态, 从而 $(p_k \otimes_S E) \circ s_k \neq 0$.

现由 $(p_k \otimes_S E) \circ s_k \neq 0$ 知 $(p_k \otimes_S E) \circ i_k \neq 0$, 故存在元素 $x_k \in E_k$ 使得 $((p_k \otimes_S E) \circ i_k)(x_k) \neq 0$. 因为循环右 R- 模 $x_k R$ 为 E 的子模，由假设知存在投射右 R- 模 P_k 以及本质单同态 $v_k : x_k R \to P_k$. 因此，如果令 $u_k : x_k R \to E_k$ 为典范包含映射，则由内射性可得同态 $h_k : P_k \to E_k$ 满足 $h_k \circ v_k = u_k$, 即有如下的交换图

$$\begin{array}{ccc} x_k R & \xrightarrow{v_k} & P_k \\ u_k \downarrow & \swarrow & h_k \\ E_k & & \end{array}$$

进而，因为 v_k 是本质单同态，所以 h_k 也为单同态.

现令 $t_k = i_k \circ h_k$, 则有

$$t_k \circ v_k = i_k \circ h_k \circ v_k = i_k \circ u_k.$$

由此可知

$$((p_k \otimes_S E) \circ t_k)(v_k(x_k)) = ((p_k \otimes_S E) \circ i_k \circ u_k)(x_k) \neq 0,$$

因此 $(p_k \otimes_S E) \circ t_k \neq 0)$, 因而其像 $N_k := \mathrm{Im}((p_k \otimes_S E) \circ t_k)$ 非零. 由此我们有典范投射 $q_k : P_k \to N_k$ 及包含映射 $w_k : N_k \to C_k \otimes_S E$.

我们断言 $N_k := \mathrm{Im}((p_k \otimes_S E) \circ t_k)$ 有限生成. 为此, 注意到 P_k 为某自由模 $R^{(I)}$ 的直和项, 设相应的包含映射为 $\varepsilon : P_k \to R^{(I)}$, 典范投射为 $\theta : R^{(I)} \to P_k$, 则有 $\theta \circ \varepsilon = 1_{P_k}$. 因此存在单同态 $\varepsilon \circ v_k : x_k R \to R^{(I)}$, 从而存在有限子集 $I_0 \subseteq I$ 使得 $\mathrm{Im}(\varepsilon \circ v_k) \subseteq R^{(I_o)}$. 若令 $\iota_0 : R^{(I_0)} \to R^{(I)}$ 为包含映射, $\pi_0 : R^{(1)} \to R^{(I_0)}$ 为典范投射, 则可得

$$v_k = \theta \circ \varepsilon \circ v_k = \theta \circ \iota_0 \circ \pi_0 \circ \varepsilon \circ v_k = \lambda_k \circ v_k,$$

其中 $\lambda_k = \theta \circ \iota_0 \circ \pi_0 \circ \varepsilon$. 令 $E'_k := E(x_k R) \subseteq E_k$, $i'_k : E'_k \to E$ 为相应的包含映射, 并设 $h'_k : P_k \to E'_k$ 为由 $h_k : P_k \to E_k$ 诱导的同态, 使得 $t_k = i'_k \circ h'_k$. 由 E 的内射性知存在同态 $i''_k : E'_k \to E$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} P_k & \xrightarrow{\lambda_k} & P_k \\ h'_k \downarrow & & \downarrow t_k \\ E'_k & \xrightarrow{i''_k} & E \end{array}$$

从而有

$$i''_k \circ h'_k \circ v_k = t_k \circ \lambda_k \circ v_k = t_k \circ v_k = i'_k \circ h'_k \circ v_k,$$

由此可知 $x_k R \subseteq Ker(i'_k - i''_k)$, 故 $Ker(i'_k - i''_k)$ 为 E'_k 的本质子模. 因为 E'_k 为 E 的直和项, 我们可以将 $i'_k - i''_k$ 扩张成 E 的一个自同态 z_k 使得其核为 E 的本质子模, 故 $z_k \in J := RadS$, 且 $z_k|_{E'_k} = i'_k - i''_k$. 由此得

$$(p_k \otimes_S E) \circ z_k = (p_k \otimes_S E) \circ (z_{k_*} \otimes E) = (p_k \circ z_{k_*}) \otimes E.$$

因为 $z_k \in J := RadS$, 故有 $(p_k \circ z_{k_*})(1) = p_k(z_k) = 0$, 故 $(p_k \otimes_S E) \circ z_k = 0$, 因而 $(p_k \otimes_S E) \circ i'_k = (p_k \otimes_S E) \circ i''_k$ 且 $(p_k \otimes_S E) \circ t_k = (p_k \otimes_S E) \circ t_k \circ \lambda_k$. 现注意到 $N_k = \mathrm{Im}((p_k \otimes_S E) \circ t_k \circ \lambda_k) \subseteq \mathrm{Im}((p_k \otimes_S E) \circ t_k \circ \theta \circ \iota_0) \subseteq \mathrm{Im}((p_k \otimes_S E) \circ t_k) = N_k$, 因此 $N_k = \mathrm{Im}((p_k \otimes_S E) \circ t_k \circ \theta \circ \iota_0)$. 又因为

$$(p_k \otimes_S E) \circ t_k \circ \theta \circ \iota_0 : R^{(I_0)} \to C_k \otimes E,$$

得定义域 $R^{(I_0)}$ 有限生成, 所以 $N_k = \mathrm{Im}((p_k \otimes_S E) \circ t_k \circ \theta \circ \iota_0)$ 也有限生成.

因为 N_k 有限生成, 对任意 $k \in K$ 我们可以找到 N_k 的单商模 U_k, 相应的典范投射为 $\pi_k : N_k \to U_k$. 记单右 R- 模 U_k 的同构类为 $[U_k]$, 则我们可以定义一个 K 到单右 R- 模的同构类的代表集为 $\Omega(R)$ 的映射为

$$k \mapsto [U_k].$$

下证此映射为单射, 从而完成整个定理的证明. 为此, 假设存在 $j, k \in K$ 使得 $[U_j] = [U_k]$, 并令 $\varphi : U_j \to U_k$ 为同构, 则需证 $j = k$. 如果以 $\alpha_k : U_k \to E(U_k)$ 表示

包含映射，则对任意 $k\in K$，由内射性，我们可以得到一 R- 同态 $\phi: E(U_j)\to E(U_k)$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{\alpha_j} & E(U_j) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\phi \\ U_k & \xrightarrow{\alpha_k} & E(U_k) \end{array}$$

同时，$\alpha_k\circ\pi_k$ 可以扩张成到 $C_k\otimes_S E$ 的同态 π'_k，故有 $\alpha_k\circ\pi_k=\pi'_k\circ w_k$，即有交换图

$$\begin{array}{ccc} N_k & \xrightarrow{\pi_k} & U_k \\ w_k\downarrow & & \downarrow\alpha_k \\ C_k\otimes_S E & \xrightarrow{\pi'_k} & E(U_k) \end{array}$$

另一方面，利用 P_j 的投射性可得同态 $\psi: P_j\to P_k$ 满足 $\pi_k\circ q_k\circ\psi=\varphi\circ\pi_j\circ q_j$. 再由 E 的内射性，可知存在自同态 $\tau\in End_R(E)=S$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} P_j & \xrightarrow{t_j} & E \\ \psi\downarrow & & \downarrow\tau \\ P_k & \xrightarrow{t_k} & E \end{array}$$

注意到 $\phi\circ\alpha_j=\alpha_k\circ\varphi$ 为单同态，故非零同态 $\phi\circ\alpha_j\circ\pi_j\circ q_j: P_j\to E(U_k)$ 的像同构于 U_j. 由此我们有

$$0\neq\phi\circ\alpha_j\circ\pi_j\circ q_j=\alpha_k\circ\varphi\circ\pi_j\circ q_j=\alpha_k\circ\pi_k\circ q_k\circ\psi=\pi'_k\circ w_k\circ q_k\circ\psi$$

$$=\pi'_k\circ(p_k\otimes_S E)\circ t_k\circ\psi=\pi'_k\circ(p_k\otimes_S E)\circ\tau\circ t_j$$

$$=\pi'_k\circ(p_k\otimes_S E)\circ\tau\circ i_j\circ h_j.$$

现假定 $j\neq k$，并考虑同态 $p_k\circ\tau_*\circ i_{j_*}: s_jS\to C_k$. 若令 $x:=(p_k\circ\tau_*)(1)\in C_k$，则我们有 $(p_k\circ\tau_*\circ i_{j_*})(s_j)=(p_k\circ\tau_*)(s_j)=xs_j\in C_ks_j=0$，与 ${}_SE$ 作张量积得 $(p_k\otimes_S E)\circ(\tau_*\otimes_S E)\circ(i_{j_*}\otimes_S E)=0$. 注意到 $\tau_*\otimes_S E\cong\tau$, $i_{j*}\otimes_S E\cong i_j$，则有

$$(p_k\otimes_S E)\circ\tau\circ i_j=0.$$

此矛盾表明 $j=k$. **证毕**.

为方便起见，若 M 为任意单右 R- 模，我们以 $C(M)$ 记 M 的单子模的代表集. 下面这个定理是由 J. L. Gomez Pardo 和 P. A. Guil. Asensio 给出的.

定理 8.1.3 设 R 为任意环，P_R 为有限生成投射右 R- 模. 假定 $E_R=E(P_R)$ 的每个循环子模可以本质地嵌入一个投射模并且 $|\Omega(R)|<|C(R)|$. 则 P_R 余生成所有单右 R- 模，并且具有有限本质基座.

证明 令 $E = E(P_R)$, 并设 $S = End(E_R)$, $J = RadS$. 由引理 8.1.2, 存在从 E_R 的不可分解直和项同构类 Φ 到 $\overline{S} := S/J$ 的极小理想同构类 Ψ 的双射. 显然 $[C] \mapsto [E(C)]$ 定义了从 $C(P)$ 到 Φ 的单射, 从而有 $|\Omega(R)| \leqslant |C(P)| \leqslant |\Phi| = |\Psi|$.

现假设 $|\Omega(R)|$ 为无限. 则 $|\Psi|$ 也为无限. 由引理 8.1.3 知, 单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k | k \in K\}$ 使得基数满足 $|\Psi| < |K|$. 再由引理 8.1.3, 存在 K 到 $\Omega(R)$ 的单射, 故有下面的不等式序列

$$|\Omega(R)| \leqslant |\Psi| \leqslant |K| \leqslant |\Omega(R)|.$$

矛盾, 故 $|\Omega(R)|$ 有限. 又因为 $|\Omega(R)| \leqslant |C(P)|$, 并且 $C(P) \subseteq \Omega(R)$, 则实际上有 $|\Omega(R)| = |C(P)|$. 这表明 P_R 余生成所有单右 R- 模.

现设 $|\Omega(R)| = n$. 我们将证明 $|\Psi| = n$. 为此, 设 $C_1, \cdots, C_r$ 为 Ψ 的代表元. 则我们已经证明 $n \leqslant r$. 进而, 存在幂等元 $e_1, \cdots, e_r \in S$ 使得 $C_i = \overline{e_i}\overline{S}$. 因为 $\overline{e_i}\overline{S}\overline{e_i} \cong End_{\overline{S}}(\overline{e_i}\overline{S})$, 所以当 $i \neq j$ 时有 $\overline{e_iSe_j} = 0$, 并且 $\overline{e_iSe_i} \neq 0$. 因此 $C_1, \cdots, C_r$ 为相应于 $e_1, \cdots, e_r$ 的单右 S/J- 模的幂等正交族. 由引理 8.1.3 可得 $r \leqslant |\Omega(R)| = n$. 因此 $|\Psi| = n$.

现在我们将证明 S/J 为半单环. 反证法, 假定存在非投射的单 S/J- 模 C 不同构于任何 $C_i = \overline{e_i S}$, $i = 1, \cdots, n$. 假设存在元素 $c \in C$ 使得 $ce_i \neq 0$ 对某个 i 成立. 则 $c\overline{e_i} \neq 0$, 因而 $(c\overline{e_i})\overline{S}$ 为 C 的非零右 S/J- 子模, 故 $(c\overline{e_i})\overline{S} = C$. 显然由 $c \in C$ 左乘定义了从 $C_i = \overline{e_i S}$ 到 C 一个非零 S/J- 同态, 由此可知 $C_i \cong C$, 矛盾. 因此 $Ce_i = 0$ 对任意 i 成立.

接下来令 $[U_1], \cdots, [U_n]$ 为在上面引理 8.1.3 中单同态下相应单右 S/J- 模 $C_1, \cdots, C_n$ 的同构像. 我们将证明在同样的单同态下存在相应于 C 的单右 R- 模 U, 并且 U 不与任何 U_i 同构. 令 $0 \neq x \in C$, 并令 $p : S_S \to C$ 为由 $p(1_S) = x$ 定义的投射. 则由上面引理 8.1.3 的证明方法知 $p \otimes_S E : E \to C \otimes_S E$ 为非零同态. 设 $0 \neq X \leqslant E$ 为不包含于 $\ker(p \otimes_S E)$ 的有限生成子模, 并令 $N = (p \otimes_S E)(X)$, 相应的投射为 $q : N \to N$. 令 U 为有限生成右 R- 模 N 的单商模, 相应的典范投射为 $\pi : N \to U$.

现假设 $\varphi : U_j \to U$ 为右 R- 模同构. 由上面引理 8.1.3 的证明方法知存在同态 $\phi : E(U_i) \to E(U)$ 使得下面的图交换

$$\begin{array}{ccc} U_j & \xrightarrow{\alpha_j} & E(U_j) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \phi \\ U & \xrightarrow{\alpha} & E(U) \end{array}$$

其中, α, α_j 为相应的嵌入映射. 类似地, 由 P_j 的投射性我们有同态 $\psi : P_j \to X$ 满足 $\varphi \circ \pi_j \circ q_j = \pi \circ q \circ \psi$. 令 $t : X \to E$ 与 $w : N \to C \otimes_S E$ 为相应的单同态. 则

由 $E(U)$ 的内射性，存在 $\pi': C\otimes_S E\to E(U)$ 使得 $\pi'\circ w=\alpha\circ\pi$. 同理，存在包含映射 $i_j: E_j=e_jE\to E$, 单同态 $h_j: P_j\to E_j$ 以及同态 $t_j: P_j\to E$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} P_j & \xrightarrow{h_j} & E_j \\ t_j\downarrow & \swarrow & i_j \\ E & & \end{array}$$

类似地，我们有自同态 $\tau: E\to E$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} P_j & \xrightarrow{t_j} & E \\ \psi\downarrow & & \downarrow\tau \\ X & \xrightarrow{t} & E \end{array}$$

由此我们有

$$\begin{aligned} 0\neq\phi\circ\alpha_j\circ\pi_j\circ q_j=\alpha\circ\varphi\circ\pi_j\circ q_j=\alpha\circ\pi\circ q\circ\psi=\pi'\circ w\circ q\circ\psi \\ =\pi'\circ(p\otimes_S E)\circ t\circ\psi=\pi'\circ(p\otimes_S E)\circ\tau\circ t_j \\ =\pi'\circ(p\otimes_S E)\circ\tau\circ i_j\circ h_j. \end{aligned}$$

同上面引理 8.1.3 的证明一样，我们考虑同态

$$p\circ\tau_*\circ i_j: e_jS\to C,$$

其中，$\tau_*=Hom_R(E,\tau)$, $i_{j_*}=Hom_R(E,i_j)$. 则我们有 $(p\otimes_S E)\circ\tau\circ i_j=0$, 矛盾. 故 S/J 为半单环.

因此 S 为半完全环，并且 $E_R=E(P_R)$ 为有限维模. 因此 E_R 是不可分解模的有限直和. 又因为 $|\Phi)\leqslant|\Psi|=n$, 由此可知这些不可分解模中每一个都是某个单右 R- 模的内射包，因此 $E_R=E(P_R)$, 从而 P_R, 具有有限本质基座. **证毕**.

推论 8.1.2 每个循环右 R- 模可以本质地嵌入一个投射模的环 R 是右 Artin 环.

证明 由上面定理 8.1.3 我们知道 R_R 具有有限本质基座. 又因为每个循环右 R- 模可以嵌入一个有限生成自由模, 所以每个循环右 R- 模都具有有限本质基座. 熟知此条件蕴涵 R 为右 Artin 环. **证毕**.

推论 8.1.3 设 R 为任意环. 若 $E(R_R)$ 是右 R- 模范畴的投射余生成元，则 R 为右 PF- 环.

证明 由上面定理 8.1.3 我们知道 R_R 具有有限本质基座. 设 $C_1,\cdots,C_n$ 为单右 R- 模的同构类的代表集，则相应的内射包 $E_i:=E(C_i)$ 为不可分解的投射模. 因此 $T_i:=E_i/E_iJ$ 为互不同构的单右 R- 模. 因此，$T_1,\cdots,T_n$ 也为单右 R- 模同

构类的代表集. 因为 $T_i := E_i/E_iJ$ 的投射盖为 $E_i := E(C_i)$, 所以 R 为半完全环. 因此 R_R 有直和分解 $R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR$, 其中 e_iR 为单模的投射盖. 因此, 每个 e_iR 都同构于某个 $E_i := E(C_i)$, 从而可知 R 为右自内射环, 即证 R 为右 PF- 环.　　**证毕.**

值得提及的是 R. Wibaoer, M. F. Yousif 和 Y. Zhou 于 2000 年给出了这样一个命题: 环 R 为 QF- 环当且仅当 R 为右 CF- 环并且每个有限生成左理想都是零化子. 我们将这个证明留给读者.

下面我们转向 FGF 猜想的研究.

首先我们证: 如果 CF 猜想成立, 则 FGF 猜想也成立.

定理 8.1.4　设 R 为右 FGF- 环. 若 R 为右 Artin 环, 则 R 为 QF- 环.

证明　为证 R 为 QF- 环, 只需证明 R 为右自内射环. 再由 Faith-Walker 的一个定理, 只需证明右 R- 模范畴具有有限生成投射余生成元.

令 $V_1, \cdots, V_n$ 代表单右 R- 模的同构类, 并令 $E_i = E(V_i)$ 为相应的内射包. 则 $C := E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ 为右 R- 模范畴的极小余生成元. 现设 F 为某个 $E_i = E(V_i)$ 的有限生成子模. 则由 R 为右 FGF- 环知, F 可以嵌入一个有限生成自由模 R^m. 然而, 因为 F 为一致模, 所以 $m = 1$. 因此任意 $E_i = E(V_i)$ 的有限生成子模 F 可以嵌入自由模 R_R, 并且 R_R 具有有限合成长度, 所以 $E_i = E(V_i)$ 满足有限生成子模的升链条件, 故 $E_i = E(V_i)$ 为 Noether 模. 因此 $E_i = E(V_i)$ 有限生成, 因而 $E_i = E(V_i)$ 可以嵌入一个自由模 R^t, 因此 $E_i = E(V_i)$ 投射. 从而 $C := E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ 是所求的有限生成投射余生成元.　　**证毕.**

由定理 8.1.4 我们可得: CF 猜想 $\Rightarrow$ FGF 猜想, 另外还可得到下列推论.

推论 8.1.4　设 R 为右 FGF- 环, 如果 R 满足以下条件之一, 则 R 为 QF- 环:

(1) 满足右零化子降链条件;

(2) R 满足左零化子升链条件;

(3) R 为左 Noether 环;

(4) R 为左 Artin 环.

定理 8.1.5　设 R 为右 FGF- 环. 若 R 为半局部的右 Noether 环, 则 R 为 QF- 环.

证明　考虑环 R 的右 Loewy 降链

$$J \supseteq J^2 \supseteq \cdots \supseteq J^n \supseteq \cdots,$$

取右零化子得升链

$$r(J) \subseteq r(J^2) \subseteq \cdots \subseteq r(J^n) \subseteq \cdots,$$

因为 R 为右 Noether 环, 故存在自然数 $n > 0$ 使得

$$r(J^n) = r(J^{n+1}) = \cdots,$$

因为 R 为右 FGF- 环，所以每个右理想都是右零化子，由此可得

$$J^n = J^{n+1} = \cdots,$$

又由 R 为右 Noether 环，所以右理想 J 有限生成，再由 Nakayama 引理知 $J^n = 0$. 又因为 R/J 半单及 R 为由 Noether 环，故由 Hopkins-Levitki 定理知 R 为右 Artin 环. 再由上面定理 8.1.4 知 R 为 QF- 环.　　　**证毕.**

定理 8.1.6　设 R 为右 FGF- 环. 若 R 具有有限生成本质右基座，则 R 为 QF- 环.

证明　因为 R 具有有限生成本质右基座，所以每个有限生成自由右 R- 模都具有有限生成本质基座. 又由 R 为右 FGF- 环知每个有限生成右 R- 模都具有本质基座，故每个右 R- 模都具有本质基座，即 R 为右半 Artin 环. 再由 R 具有有限生成本质基座知 R 不包含无限正交幂等元集，故由 Bass 定理知 R 为右完全环. 因此 R/J^2 具有有限生成本质右基座，从而 J/J^2 作为右 R- 模有限生成. 由 Osofsky 的一个定理知 R 为右 Artin 环，再由上面定理 8.1.4 知 R 为 QF- 环.　　　**证毕.**

定理 8.1.7　设 R 为右 FGF 环. 若 R 为右 Noether 环，则 R 为 QF- 环.

证明　只需证明 R 具有有限生成本质右基座 $S := SocR_R$.

因为 R 为右 FGF- 环，所以 R 的每个右理想都是右零化子. 由上面定理 8.3.2 的证明知，环 R 的 Jacobson 根 $J := RadR$ 幂零. 再由 Goldie 的一个结果知其右零化子 $r(J)$ 为本质右理想. 因此，若令 $Z := Z(R_R)$ 为环 R 的右奇异理想，则

$$r^2(J) := r(r(J)) \subseteq Z,$$

因为 R 为右 Noether 环, 由 Mewborn-Winton 定理知其右奇异理想 $Z := Z(R_R)$ 幂零. 因此 $Z \subseteq J$. 从而

$$r^2(J) \subseteq J,$$

归纳地定义 $r^n(J) := r(r^{n-1}(J))$, 则可得右理想升链

$$r(J) \subseteq r^2(J) \subseteq \cdots \subseteq r^n(J) \subseteq \cdots.$$

因为 R 为右 Noether 环，所以存在奇数 m 使得

$$r^m(J) = r^{m+2}(J) = \cdots,$$

取左零化子得

$$l(r^{m+2}(J)) = l(r^m(J)),$$

由此可得

$$l(r^{m+1}(J)) = l(r^{m-1}(J)),$$

归纳地有

$$l(J) = r(J).$$

再由 Johns 的一个结果知，环 R 的右基座 $S := SocR_R$ 为本质右理想. 因此，若 K 为 R 的本质右理想，则 $l(K) \subseteq Z \subseteq J$, 故 $K = rl(K) \supseteq r(J)$. 因为 $S := SocR_R$ 为本质右理想的交，这表明 $l(J) \subseteq S$. 但是右零化子 $r(J)$ 为本质右理想，因此

$$l(J) = r(J) \supseteq S.$$

即证 $S := SocR_R = r(J)$ 为有限生成本质右理想.　　**证毕.**

J. E. Bjork 和 T. S. Tol' skaya 分别于 1972 年和 1970 年证得下列定理.

定理 8.1.8　设 R 为右 FGF- 环. 若 R 为右自内射环，则 R 为 QF- 环.

证明　因为 R 为右 FGF- 环，所以每个单右 R- 模可以嵌入右正则模 R_R. 故 R_R 为右 R- 模范畴的余生成元，因而 R 为右 PF- 环. 再由 Osofsky 的一个定理知 R 具有有限生成本质右基座. 由上面定理 8.1.6 知 R 为 QF- 环.　　**证毕.**

推论 8.1.5　设 R 为右 FGF- 环. 若 R 为右 PF- 环，则 R 为 QF- 环.

定理 8.1.9　设 R 为右 FGF- 环. 若 R 的每个 (极大) 左理想为左零化子，则 R 为 QF- 环.

证明　设 L 为任意左理想，并令 $I = r(L)$. 则由假设知存在 R 的有限子集 $A = \{a_1, \cdots a_n\}$ 使得 $I = r(A)$. 现令 $L_1 = RA = Ra_1 + \cdots + Ra_n$, 则 L 与 L_1 都是左零化子，故有

$$L_1 = l(I) = l(r(L)) = L,$$

由此可知每个左理想都有限生成，故 R 为 QF- 环.

对于每个极大理想都是左零化子的情形，由 Kato 的一个定理知 R_R 内射，故由上面定理 8.1.8 知 R 为 QF- 环,　　**证毕.**

下面我们将上述的 Bjork-Tolskaja 定理中的内射性条件削弱为右 CS- 环. 称环 R 为右 CS- 环，如果每个补右理想都是 R_R 的直和项，或等价地，每个右理想都可以本质地嵌入 R_R 的一个直和项. 显然右自内射环为 CS- 环. 下面这个定理是 Pardo-Asensio 给出的.

定理 8.1.10　对任意环 R, 以下条件等价:

(1) R 为 QF- 环;

(2) 每个有限生成右 R- 模可以本质地嵌入到一个投射模中;

(3) R 为右 FGF- 环，并且 R 为右 CS- 环.

证明　(2) $\Rightarrow$ (1). 因为 R 为右 CF- 环，由定理 8.1.3 知 R 具有有限生成本质右基座，从而 R 为 QF- 环.

(3) $\Rightarrow$ (1). 只需证明右正则模 R_R 具有有限本质基座. 为此，令 $E := E(R_R)$, $S := End(R_R)$, 且令 $J := RadS$.

首先证明对任意为单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k|k \in K\}$, 存在从指标集 K 到单右 R- 模的同构类的代表集为 $\Omega(R)$ 的单射. 假设与单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k|k \in K\}$ 相应的幂等元族为 $\{s_k \in S|k \in S\}$. 对任意 $k \in K$, 令 $c_k \in C_k$ 满足 $c_k s_k \neq 0$, 并设 $p_k : S_S \to C_k$ 为由 $p_k(1_S) = c_k$ 定义的右 S- 模同态，则 $p_k(s_k) \neq 0$, 并且由引理 8.1.4 的证明知 $(p_k \otimes_S E) \circ s_k \neq 0$. 现对任意 $k \in K$ 定义 $E_k = s_k E$, 并设 $i_K : E_k \to E$ 为包含映射. 则由 $(p_k \otimes_S E) \circ s_k \neq 0$ 可知 $(p_k \otimes_S E) \circ i_k \neq 0$. 令 $L_k := E_k \bigcap R$, 则由 L_k 为 E_k 本质子模知 $E_k = (L_k)$. 另一方面，因为 R 为右 CS- 环，故存在 R_R 直和项 $P_k = e_k R$(其中 $e_k \in S$ 为幂等元), 以及本质单同态 $v_k : L_k \to P_k$. 因此 P_k 可以本质地嵌入 E_k, 故 $E_k = E(P_k)$ 为 P_k 的内射包.

现设 $h_k : P_k \to E_k$ 为包含映射,并令 $t_k := i_k \circ h_k$. 反证法,假设 $(p_k \otimes_S E) \circ t_k = 0$. 则由因子定理知同态 $(p_k \otimes_S E) \circ i_k$ 可通过模 E_k/P_k 分解. 另一方面，若令 $P'_k := (1 - e_k)R$ 且 $E'_k := E(P'_k)$, 则显然有 $E \cong E_k \oplus E'_k$, 因而

$$E/R \cong (E_k/P_k) \bigoplus (E'_k/P'_k),$$

因为 $s_k E'_k = 0$, 故 $(p_k \otimes_S E) \circ s_k$ 可以通过 E/R 分解. 从而 $(p_k \otimes_S E) \circ s_k = 0$, 矛盾，故 $(p_k \otimes_S E) \circ t_k \neq 0$.

接下来重复引理 8.1.4 的证明，我们可以断言存在从指标集 K 到单右 R- 模的同构类的代表集为 $\Omega(R)$ 的单射.

注意到在定理 8.1.3 中，E 的循环子模可以本质地嵌入投射模的假设只应用于引理 8.1.4. 故重复定理 8.1.3 的证明，可知正则模 R_R 具有有限本质基座， **证毕**.

定理 8.1.11 设 R 为右 FGF- 环. 若每个可数生成非零右 R- 模具有极大子模，则 R 为 QF- 环.

证明 令 $E := E(R_R)$, $S := End(R_R)$, 且令 $J := RadS$. 设 $\{C_k|k \in K\}$ 为单右 S/J- 模的幂等正交族. 假设与单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k|k \in K\}$ 相应的幂等元族为 $\{s_k \in S|k \in S\}$. 对任意 $k \in K$, 令 $c_k \in C_k$ 满足 $c_k s_k \neq 0$, 并设 $p_k : S_S \to C_k$ 为由 $p_k(1_S) = c_k$ 定义的非零右 S- 模同态. 对任意 $k \in K$, 现定义 $E_k = s_k E$, 则 $(p_k \otimes_S E)(E_k) \neq 0$.

下面,我们将归纳地定义 E_k 的可数生成 c- 投射子模 P_k 使得 $(p_k \otimes_S E)(P_k) \neq 0$. 若令 $L_k := E_k \bigcap R$, 则由 L_k 为 E_k 本质子模知 $E_k = (L_k)$ 为内射模. 首先定义 $Q_1 := L_k$, 并设相应的包含映射为 $u_1 : Q_1 \to E_k$. 因为 R 为右 FGF- 环，所以存在有限生成自由模 F_1, 以及单同态 $v_1 : Q_1 \to F_1$. 现考虑下图

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & \xrightarrow{v_1} & F_1 \\ u_1 \downarrow & \swarrow & w_1 \\ E_k & & \end{array}$$

由 E_k 内射性知存在 $w_1 : F_1 \to E_k$ 使得 $w_1 \circ v_1 = u_1$. 定义 $Q_2 := \mathrm{Im} w_1$, 并且归纳地对任意 $n > 1$ 定义 $Q_n := \mathrm{Im} w_n$. 则 Q_n 都是 E_k 的有限生成子模，并且有升链

$$Q_1 := L_k \subseteq Q_2 \subseteq \cdots \subseteq Q_n \subseteq \cdots,$$

现定义

$$P_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \ ,$$

则 P_k 为 E_k 的可数生成子模. 下证 P_k 是 c- 投射的. 为此，令 L 为 P_k 的有限生成子模，并设相应的包含映射为 $u : L \to P_k$. 设 $p : X \to Y$ 为任意满同态， $f : P_k \to Y$ 为任意同态. 因为 $P_k := \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, 故存在 Q_n 使得 $L \subseteq Q_n$. 由构造知，存在有限生成自由模 F_n 以及单同态 $v_n : Q_n \to F_n$, 并且存在同态 $w_n : F_n \to E_n$ 使得包含映射 $u_n : Q_n \to E_k$ 可分解为 $u_n = w_n \circ v_n$, 即下图于交换

$$\begin{array}{ccc} Q_n & \xrightarrow{v_n} & F_n \\ u_n \downarrow & \swarrow & w_n \\ E_k & & \end{array}$$

由此可知 $u : L \to P_k$ 可通过 F_n 分解，从而 $f \circ u$ 也可以通过 F_n 分解，即存在同态 $g : L \to X$ 使得 $f \circ u = p \circ g$. 即证 P_k 是 c- 投射的.

因为每个可数生成非零右 R- 模具有极大子模，并且模 P_k 是可数生成的，所以模 $(p_k \otimes_S E)(P_k)$ 存在单商模. 再由引理 8.1.4 知 $|K| \leqslant |\Omega(R)|$ 成立. 因此 $E := E(R_R)$ 为余生成元，并且具有有限本质基座. 由此可知环 R 为 QF- 环，**证毕**.

下面我们考虑有限生成无挠模可以嵌入自由模的情形.

称右 R- 模 M 为无挠模，如果 M 可以嵌入右正则模 R_R 的某个直积 $(R_R)^A$. 故有限生成无挠模 M 何时嵌入自由模的问题，相当于问相应的指标集 A 何时为有限集. 由此可见，这个问题是十分自然的. 特别地，若 R_R 为右 R- 模范畴的余生成元，则每个右 R 模都无挠，此时问题就转化为熟知的 FGF 猜想.

定理 8.1.12　设 R 为左 $\pi-$ 凝聚环，则每个有限生成无挠右 R- 模 M 可以嵌入自由模.

证明　由左 $\pi-$ 凝聚环的定义知，对偶模 M^* 有限生成. 故存在有限生成自由模 $_RR^n$ 以及满同态

$$R^n \to M^* \to 0,$$

再用对偶函子作用可得单同态

$$0 \to M^{**} \to R^n \cong (R^n)^*,$$

又因为 M 无挠，故存在典范单同态 $M \to M^{**}$. 由此可以诱导嵌入映射 $M \to R^n$. **证毕**.

在文献 [163] 中，我们证明了下列结果，限于篇幅我们省去其证明.

任意右 FGF 环为左 $\pi-$ 凝聚环；右 FGF 右完全环为 QF- 环；任意右 SF 右 $FGFF$- 环为半单 Artin 环 (环 R 为 $FGFF$- 环是指每个有限生成平坦模可以嵌入自由模的环).

§8.2 模的嵌入问题 -Menal 问题

现设 α 为任意基数. 称 R 为 α-GF 环，如果每个 α- 生成的右 R- 模都可以嵌入一个自由模.

Menal 曾猜想存在任意可数生成右 R- 模可以嵌入自由模的环 R 不是 QF- 环. 一般地，有下面的问题

Menal 问题：是否存在一个基数 α, 使得每个右 α-GF- 环都是 QF- 环？

关于 Menal 问题，目前最好的结果是 Pardo-Aensio 于 1997 年获得的. 他们证明若基数 $\alpha \geqslant |R|$, 则 Menal 问题的答案是肯定的，即每个 $\alpha = |R|$- 生成的右 R- 模可嵌入自由模的环 R 为 QF- 环. 从而可以将 Menal 问题归结为 $\alpha < |R|$ 的情形.

引理 8.2.1 设 R 为任意环， E_R 为内射模，并令 $S = End_R(E)$, $J = RadS$, 且假定 $|\Omega(R)| < |C(E)|$. 若对任意单右 S/J- 模的幂等半正交族 $\{C_k | k \in K\}$ 成立 $|K| \leqslant |\Omega(R)|$, 则 E_R 为右 R- 模范畴的余生成元，并且具有有限本质基座.

证明 这个定理的证明参见文献 [120] (定理 2.5) 的证明. **证毕**

称模 M 为 c- **投射模**, 如果对任意满同态 $p: X \to Y$ 以及同态 $f: M \to Y$, 则对任意 $m \in M$ 存在同态 $h: mR \to X$ 使得 $(p \circ h)(m) = f(x)$.

命题 8.2.1 设 E_R 为内射模. 则以下条件等价：

(1) E_R 为 c- 投射模； E_R 的每个循环子模可以本质地嵌入一个 c - 投射模；

(2) E_R 的每个循环子模可以嵌入一个 c - 投射模.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由 c- 投射模的直和项为 c- 投射模可知.

(2) $\Rightarrow$ (1). 设 $f: E \to Y$ 为任意同态， $p: X \to Y$ 为满同态. 现任取 $x \in E$, 考虑子模 $xR \subseteq E$, 并设相应的包含映射为 $u: xR \to E$. 由假设知，存在 c- 投射模 M 以及单同态 $v: xR \to M$. 因为 E 内射，所以存在同态 $w: M \to E$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} xR & \xrightarrow{v} & M \\ u\downarrow & \swarrow & w \\ E & & \end{array}$$

由于 M 为 c- 投射模, 因而存在同态 $g: xR \to X$ 使得 $f \circ w \circ v = p \circ g$,故 $f \circ u = p \circ g$, 即证 E 为 c- 投射模. **证毕**.

现设 R 为任意环，E_R 为内射模，并令 $S = End_R(E)$, $J = RadS$. 考虑单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k|k \in K\}$, 以及相应的幂等元族 $\{e_k|k \in K\}$. 因为 S/J 可幂等提升，故存在幂等元族 $\{s_k \in S|k \in K\}$ 满足 $e_k = s_k + J$. 现对任意 $k \in K$, 令 $E_k = s_kE \subseteq E$, 并定义满同态 $p_k : S \to C_k$ 为

$$p_k(1) = c_k,$$

其中 $c_k \in C_k$ 满足 $c_ks_k \neq 0$.

引理 8.2.2　设 R 为任意环，E_R 为内射模，并令 $S = End_R(E)$, $J = RadS$, 且设 $\{C_k|k \in K\}$ 为单右 S/J- 模的幂等半正交族. 若对任意 $k \in K$, 存在 $E_k = s_kE$ 的 c- 投射子模 P_k 使得 $(p_k \otimes_S E)(P_k)$ 具有非零单商模，则 $|K| \leqslant |\Omega(R)|$.

证明　这个引理的证明可以从修改引理 8.1.4 的证明而得到.　　**证毕**.

引理 8.2.3　设 R 为任意环，P_R 为有限生成投射模其内射包 $E_R := E(P_R)$ 为 c- 投射模，并假设 E/JE 的每个真子模都包含一个极大子模. 则对任意单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k|k \in K\}$, 有 $|K| \leqslant |\Omega(R)|$.

证明　考虑具有结合幂等元 $\{e_k\}_{k\in K}$ 的单右 S/J- 模半正交幂等元簇 $\{C_k\}_{k\in K}$, 设 s_k 为 S 的幂等元满足 $e_k = s_k + J_k$, $k \in K$, 那么对于任意的 $k \in K$ 存在 $c_k \in C_k$ 使得 $C_ks_k \neq 0$. 设 Mod- 模同态 $p_k : S \to C_k$, $p_k(1) = c_k$, 具有包含映射 $i_k : E_k \to E$ 的 $E_k = s_kE$ 和 $i_{K_*} = Hom_R(E, i_k)$, 我们有由 $(p_k \circ i_{k_*}) \otimes_S E$ 定义的幂等元同态

$$(p_k \otimes_S E) \circ i_k : E_k \to C_k \otimes_S E.$$

从而有 $(p_k \otimes_S E)(E_k) = C_k \otimes_S E$. 由文献 [118] (Proposition 1.3) 我们有 $C_k \otimes_S E \neq 0$, 因为 $C_k \otimes_S E$ 是 E/JE 的商模和我们的假设，$C_k \otimes_S E$ 是单商模，因此应用引理 8.2.2 得到 $P_k = E_k$, 有 $|K| \leqslant |\Omega(R)|$.　　**证毕**.

下面这个定理是 Pardo-Asensio 在 1997 年得到的.

定理 8.2.1　设 R 为右 CF- 环，且令 $E := E(R_R)$. 若 E/JE 的每个真子模都包含一个极大子模，则 R 为右 Artin 环.

证明　因为每个循环右 R- 模可以嵌入一个自由模, 故只需证明 R_R 具有有限本质基座. 由命题 8.2.1 与引理 8.2.3 知, 对任意单右 S/J- 模的幂等正交族 $\{C_k|k \in K\}$, 其基数 $|K| \leqslant |\Omega(R)|$. 再由引理 8.2.1 知 $E := E(R_R)$ 即有有限本质基座，从而 R_R 具有有限本质基座.　　**证毕**.

推论 8.2.1　设 R 为右 CF- 环. 如果每个非零右 R- 模都包含一个极大子模，则 R 为右 Artin 环.

推论 8.2.2　设 R 为右 CF- 环，且令 $E := E(R_R)$. 如果 E/JE 有限生成，则 R 为右 Artin 环.

显然此结果推广了下面 Menal(见文献 [93]) 的结果.

推论 8.2.3 设任意环 R, 并令 c 为 $E := E(R_R)$ 的生成元集的的基数. 则一下条件等价:

(1) R 为 QF- 环;

(2) R 为右 CF- 环, 并且 $E(R_R)$ 作为右 R- 模投射;

(3) R 为 α - GF- 环.

设 R 为右 CF- 环, 且令 $E := E(R_R)$. 下面我们给出基数 $|E/JE|$ 的上界.

命题 8.2.2 设 R 为任意环. 若 $E := E(R_R)$ 的每个 2- 生成的子模可以嵌入一个自由模, 则 $|E/JE| \leqslant \max\{|R|, \aleph_0\}$.

证明 令 $S = End_R(E)$, $J = RadS$. 首先证明 $|E/JE| \leqslant |S/J|$. 由于

$$E/JE \cong (S/J) \otimes_S E,$$

故只需证明 $(S/J) \otimes_S E$ 中每个元素都具有 $(s+J) \otimes 1_R$ 的形式, 其中 $s \in S$. 现任取 $e \in E$, 并考虑 $(s+J) \otimes e \in (S/J) \otimes_S E$. 定义同态 $f : R \to E$ 为 $f(1_R) = e$, 则由 E 的内射性知 f 可扩张成 E 的自同态 $s' \in S := End(E)$ 使得 $s'(1_R) = f(1_R) = e$. 因此

$$(s+J) \otimes e = (s+J) \otimes s'(1_R) = (ss'+J) \otimes 1_R,$$

因此 $(S/J) \otimes_S E$ 中每个元素都具有 $(s+J) \otimes 1_R$ 的形式, 其中 $s \in S$.

接下来我们证明 $|S/J| \leqslant \max\{|R|, \aleph_0\}$. 对任意 $n \geqslant 1$, 构造集合

$$M_n := \{f \in Hom_R(R, R^n) | f\text{为单同态 o}\},$$

并对任意 $f \in M_n$ 定义

$$\Delta_{n,f} := \{g \in Hom_R(R, R^n) | \mathrm{Im}g \bigcap \mathrm{Im}f \lhd \mathrm{Im}g\}.$$

现定义映射 $\varphi_{n,f} : \Delta_{n,f} \to S/J$ 如下: 令 $g \in \Delta_{n,f}$, 并设 $u : R \to E$ 为典范包含映射. 因为 f 为单同态, 故存在同态 $h : R^n \to E$ 使得 $h \circ f = u$. 再利用 E 的内射性知存在 E 的自同态 $s \in S := End(E)$ 使得 $s \circ u = h \circ g$, 即下图交换

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{g} & R^n \\ u\downarrow & & \downarrow h \\ E & \xrightarrow{s} & E \end{array}$$

由此可以定义

$$\varphi_{n,f}(g) = s + J,$$

下证 $\varphi_{n,f} : \Delta_{n,f} \to S/J$ 是定义好了的. 为此, 假设存在 $h' : R^n \to E$, 以及 $s' \in S$ 满足 $h' \circ f = u$,$s' \circ u = h' \circ g$. 则 $L := g^{-1}(\mathrm{Im}f)$ 是 R_R 的本质子模, 从而也在 E_R

中本质. 令 $v: L \to R$ 为包含映射, 则存在单同态 $g': L \to R$ 使得 $f \circ g' = g \circ v$, 即下图交换

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{g'} & R \\ v\downarrow & & \downarrow f \\ R & \xrightarrow{g} & R^n \end{array}$$

因而有

$$s \circ u \circ v = h \circ g \circ v = h \circ f \circ g' = u \circ g',$$

类似地, 有

$$s' \circ u \circ v = h' \circ g \circ v = h' \circ f \circ g' = u \circ g'.$$

由此可知在 L 上得限制 $s|_L = s'|_L$, 并且自同态 $s - s' \in S := End(E_R)$ 得核 $\ker(s - s')$ 为本质子模. 因而 $s - s' \in J$, 即证 $s + J = s' + J$.

现在我们断言: 对任意 $s \in S := End(E)$ 存在 $n \geqslant 1$, $f \in M_n$, 以及 $g \in \Delta_{n,f}$ 满足 $\varphi_{n,f}(g) = s + J$. 令 $x = s(1) \in E$, 并定义同态 $\alpha: R \to xR + R$ 为 x 得左乘. 设 $v: xR + R \to E$ 为包含映射, 则 $s \circ u = v \circ \alpha$. 因为每个 2- 生成的子模可以嵌入一个自由模, 故存在 $n \geqslant 1$, 以及单同态 $w: xR + R \to R^n$. 令 $f := w|_R$, 并令 $g = w \circ \alpha$. 因为 R_R 为 E_R 的本质子模, 故 $xR \bigcap R$ 为 xR 的本质子模, 因此

$$\mathrm{Im} g \bigcap \mathrm{Im} f = w(xR) \bigcap w(R) \lhd \mathrm{Im} g = w(xR),$$

这表明 $g \in \Delta_{n,f}$. 由 E 的内射性, 存在同态 $h: R^n \to E$ 使得 $h \circ w = v$. 因此特别地有 $h \circ f = v|_R = u$. 因而有

$$s \circ u = v \circ \alpha = h \circ w \circ \alpha = h \circ g,$$

故有 $\varphi_{n,f}(g) = s + J$.

由此可知

$$|S/J| < \left| \bigcup_{n \geqslant 1} \left(\bigcup_{f \in M_n} \Delta_{n,f} \right) \right|,$$

又因为

$$|M_n| \leqslant |Hom_R(R, R^n)| = |R^n| \leqslant \max\{|R|, \aleph_0\},$$

类似地对任意 $n \geqslant 1$, $f \in M_n$, 有

$$|\Delta_{n,f}| \leqslant \max\{|R|, \aleph_0\},$$

由此即证 $|S/J| \leqslant \max\{|R|, \aleph_0\}$.　　**证毕.**

下面这个著名定理是 Pardo-Asensio 在 1997 年得到的.

定理 8.2.2 假设 α 为基数并且 $\alpha > |R|$, 则每个右 α-GF- 环 R 都是 QF- 环.

证明 令 $E := E(R_R)$. 若 R 为有限环, 则每个 2- 生成的右 R- 模可以嵌入一个自由模. 设 $a \in E(R_R)$. 因为每个 2- 生成的右 R- 模可以嵌入一个自由模, 所以存在自由模 R^n 以及单同态 $\sigma : R + aR \to R^n$. 因为 R 为右 α-GF- 环且 $\sigma(R) \cong R$, 故 $\sigma(R)$ 为 R^n 的直和项, 因此也是 $\sigma(R + aR)$ 的直和项. 但是由 $R \lhd R + aR$ 可知 $\sigma(R) \lhd \sigma(R + aR)$. 这表明 $a \in R$, 故 $R_R = E(R_R)$ 内射. 又因为 R 为右 Kasch 环, 所以 R 是有限余生成的, 因而每个循环右 R- 模具有有限生成本质基座, 故 R 为右 Artin 环, 从而 R 为 QF- 环.

现假设 R 为无限环, 并令 $S = End_R(E)$, $J = RadS$. 只需证明若 $R_R^{(R)}$ 的每个商模都可以嵌入一个自由模, 则 E/JE 是有限生成的. 因为 R 为右 α-GF- 环, 由命题 8.2.2 知 $|E/JE| \leqslant \alpha := |R|$. 令 $q : E \to E/JE$ 为典范投射. 易知存在 $E := E(R_R)$ 的 α- 生成子模 M 使得 $q(M) = E/JE$, 又因为 $q(M) = q(M + R)$, 故不妨假设 $R \subseteq M$, 并记相应的包含映射为 $v : R \to M$. 因为 R 为右 α-GF- 环, 故存在自由模 $R^{(I)}$(其中 I 为某指标集) 以及单同态 $w : M \to R^{(I)}$. 由此可知存在有限子集 $F \subseteq I$ 使得 $\mathrm{Im}(w \circ v) \subseteq R^F$. 若以 $\pi : R^{(I)} \to R^F$ 记相应的投射, 则 $\pi \circ w \circ v$ 为单同态. 又因为 $v : R \to M$ 为本质映射, 故 $\pi \circ w$ 也为单同态. 再由 $E := E(R_R)$ 的内射性, 可得同态 $h : R^F \to E$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi \circ w} & R^F \\ inc \downarrow & \swarrow & h \\ E & & \end{array}$$

其中 $inc : M \to E$ 为包含映射. 因此

$$E/JE = q(M) = (q \circ h \circ \pi \circ w)(M) \subseteq (q \circ h)(R^F) \subseteq E/JE.$$

由此可知

$$E/JE = (q \circ h)(R^F)$$

有限生成. **证毕.**

§8.3 Faith-Menal 猜想

本节我们介绍著名的 Faith-Menal 猜想. 1977 年, Johns 研究了每个右理想均为右零化子的右 Noether 环, 他证明了此类环为右 Artin 环, 但后来发现他采用了 Kursan 的一个错误结论. 1992 年, Faith-Menal 给出了一个反例, 说明 Johns 所讨论的环 (右 Johns 环) 不是右 Artin 环. 1994 年, Faith-Menal 研究了每个矩

阵环 $M_n(R)$ 均为右 Johns 环的环 R(强右 Johns 环), 他们证明了环 R 为强右 Johns 环等价于 R 为右 Noether 环且每个有限表现的右 R- 模 M_R 无挠, 也等价于 R 为右 Noether 环的左 FP- 射环. 我们知道右 Johns 环不是右 Artin 环, 但可以问强右 Johns 环不是右 Artin 环. 注意到 1969 年 Rutter 证明了如果 R 为右 Artin 环且有限表现的右 R- 模 M_R 无挠, 则 R 为 QF- 环. 因此上述问题就等价于问强右 Johns 环不是 QF- 环. Faith-Menal 猜想此结论成立, 这就是著名的:

Faith-Menal 猜想: 右 Noether 左 FP- 内射环为 QF- 环.

定义 8.3.1 (1) 称环 R 为右 **Johns** 环, 如果 R 为右 Noether 环, 且每个右理想均为右零化子. (2) 称环 R 为右强 **Johns** 环, 如果对任意自然数 n, 全矩阵环 $M_n(R)$ 为右 Johns 环.

首先我们给出 Johns 环的一些性质.

命题 8.3.1 设 R 为右 Johns 环, 其右奇异理想为 Z_r. 则

(1) J 是幂零理想;

(2) $r(J) = l(J) = S_r := Soc(R_R)$;

(3) $r(S_r) = l(S_r) = J$;

(4) 其右基座 $S_r \lhd R_R$, 并且 $S_r \lhd_R R$;

(5) $J = Z_r = Z_l$;

(6) R 为左 P- 内射环;

(7) R_R 是有限余生成的.

证明 (1) 我们有升链

$$l(J) \subseteq l(J^2) \subseteq \cdots \subseteq l(J^k) \subseteq \cdots,$$

故存在 k 使得

$$l(J^k) = l(J^{k+1}),$$

再由每个右理想均为零化子知

$$J^k = rl(J^k) = rl(J^{k+1}) = J^{k+1},$$

因为 R 也为右 Noether 环, 故 $J := RadR$ 有限生成, 从而由 Nakayama 引理知 $J^k = 0$.

(2) 若 $0 \neq x \in R$, 则由 (1) 知或者 $xJ = 0$, 或者存在某个 k 使得 $xJ^k \neq 0$, 且 $xJ^{k+1} = 0$. 无论哪种情况, 都有 $xR \bigcap l(J) \neq 0$, 这表明 $l(J) \lhd R_R$, 进而有 $l^2(J) := ll(J) \subseteq Z_r$. 因为 R 满足右理想升链条件, 故右奇异理想 Z_r 幂零, 所以 $l^2(J) \subseteq J$. 现记 $l^1(J) = l(J)$, 并归纳地对每个 k 定义 $l^{k+1}(J) = l(l^k(J))$, 则可得升链

$$l(J) \subseteq l^3(J) \subseteq l^5(J) \subseteq \cdots,$$

因此，存在 k 使得

$$l^k(J) = l^{k+2}(J),$$

取右零化子得

$$rl(l^{k-1}(J)) = rl^k(J) = rl^{k+2}(J) = rl(l^{k+1}(J)),$$

再由每个右理想均为零化子知

$$l^{k-1}(J) = l^{k+1}(J),$$

递归地有

$$J = l^2(J),$$

再由每个右理想均为零化子知

$$r(J) = rl^2(J) = rl(l(J)) = l(J),$$

又显然有 $S_r \subseteq l(J)$. 若右理想 $I \triangleleft R_R$, 则 $l(I) \subseteq Z_r \subseteq J$, 故 $r(J) \subseteq rl(I) = I$. 因此

$$r(J) \subseteq \bigcap\{I | I \triangleleft R_R\} = S_r.$$

(3) 由 (2) 知 $S_r = l(J)$, 再由每个右理想均为零化子知 $l(S_r) = rl(J) = J$. 同时，在 (2) 中已经证明 $l(J) \triangleleft R_R$, 并且 $l^2(J) = J$, 因此 $J \subseteq Z_r$. 又因为 $Z_r S_r = 0$, 所以 $J \subseteq l(S_r)$. 进而由 (2) 知 $r(J) \subseteq S_r$, 因而

$$J \subseteq l(S_r) \subseteq lr(J) = ll(J) = J.$$

(4) 由 (2) 及其证明知 $S_r = l(J) \triangleleft R_R$. 为证 $l(J) \triangleleft R$, 假设 $l(J) \bigcap Rb = 0$. 则 $l(bJ) \subseteq l(b)$, 故 $rl(b) \subseteq rl(bJ) = bJ$, 由此可知 $b \in bJ$, 因此 $b = 0$, 即证 $l(J) \triangleleft R$.

(5) 因为 R 为左 P- 内射环，故 $J = S_l$, 再由 (2) 与 (3) 的证明知 $J = Z_r$.

(6) 由右理想为右零化子可知.

(7) 为 (4) 的直接推论. **证毕**.

在 Faith-Menal 猜想的研究过程中，Nicholson-yousif 引入了一类重要的 $C2$ 条件. 他们不仅证明在 $C2$ 条件下 Faith-Menal 猜想成立，而且还发现 $C2$ 条件与模的嵌入问题有着内在联系.

称 R- 模 M 为 $C2$- 模，如果每个同构于 M 的直和项的子模都是 M 的直和项.

称环 R 为右 $C2$- 环，若右正则模 R_R 为 $C2$- 模.

下面的命题提供了大量的右 $C2$- 环的例子.

命题 8.3.2 设 R 为任意环. 则

$$R\text{为左 Kasch环} \Rightarrow R\text{为右}C2\text{- 环} \Rightarrow Z_r \subseteq J.$$

证明　假设 R 为左 Kasch 环. 为方便起见, 我们以 $K|M$ 表示 K 为模 M 的直和项. 假设存在 $a \in R$ 使得 aR 同构于 R 的一个直和项, 则只需要证明 $aR|R$, 进而可知 $Ra|R$. 因为 aR 投射, 存在幂等元 $e = e^2 \in R$ 使得 $r(a) = (1-e)R$. 因而 $a = ae$, 由此可知 $Ra \subseteq Re$. 我们断言 $Ra = Re$. 假设 $Ra \neq Re$, 则存在 Re 的极大子模 N 使得 $Ra \subseteq N \subseteq Re$. 又因为 R 为左 Kasch 环, 故存在单同态 $\sigma: Re/N \to_R R$. 记 $c := (e+N)\sigma$, 则由 $a = ae$ 知 $ec = c$, 并且 $c \in r(a) = (1-e)R$. 由此可得 $c = ec = 0$ 再由 $\sigma: Re/N \to_R R$ 为单同态知 $e \in N$, 这与极大子模定义矛盾, 故 $Ra = Re$. 即证 R 为右 $C2$- 环.

现假设 R 为右 $C2$- 环. 任取 $a \in Z_r$, 则 $r(a) \bigcap r(1-a) = 0$, 由此可知 $r(1-a) = 0$, 因此 $(1-a)R \cong R_R$. 由假设 $(1-a)R$ 是 R_R 的直和项, 进而 $R(1-a)$ 也为 R 的直和项, 故存在 $e^2 = e \in R$ 使得 $R(1-a) = Re$. 因而 $1-e \in r(1-a) = 0$, 因此 $R(1-a) = R$, 故 $a \in J$, 即证 $Z_r \subseteq J$.　　**证毕.**

下面我们研究命题 8.3.2 中三类条件何时等价.

命题 8.3.3　设 R 为环. 若右正则模 R_R 有限余生成, 并且其右基座 $S_r \subseteq S_l$, 则以下条件等价:

(1) 环 R 为左 Kasch 环;

(2) R 为右 $C2$- 环;

(3) 奇异右理想 $Z_r \subseteq J$.

此时 R 为半局部环, 并且有 $l(S_r) = l(S_l) = J$.

证明　(3) $\Rightarrow$ (1). 为证 R 为左 Kasch 环, 任取环 R 的极大左理想 ${}_RM$, 并假设 $r({}_RM) = 0$, 我们将导出矛盾. 因为右正则模 R_R 有限余生成, 故右基座 S_r 有限生成, 从而存在单右理想 $k_1R, \cdots, k_nR$ 使得 $S_r = k_1R + \cdots k_nR$. 我们断言存在 $m \in M$ 使得对任意 $i = 1, \cdots, n$ 有 $(1-m)k_i = 0$. 为证此断言, 我们对 n 进行归纳. 若 $n = 1$, 则由 $k_1 \notin r(M)$ 知 $M \not\subset l(k_1)$. 但是由 k_1R 为单右理想知 $l(k_1)$ 为极大左理想, 从而 $M + l(k_1) = R$. 现假设 $n \geqslant 2$, 并存在 $m_1 \in M$ 使得 $(1-m_1)k_i = 0$ 对任意 $i = 1, \cdots, n-1$ 成立. 若 $(1-m_1)k_n = 0$, 则断言成立. 假设 $(1-m_1)k_n \neq 0$, 则 $(1-m_1)k_nR$ 为单右理想, 从而由 $n = 1$ 情形知存在 $m_2 \in M$ 使得 $(1-m_2)(1-m_1)k_n = 0$. 因此对任意 $i = 1, \cdots, n$ 有 $(1-m_2)(1-m_1)k_i = 0$. 令 $m = m_2 + m_1 - m_2m_1$ 可知断言成立.

由此可知 $(1-m)S_r = 0$, 即 $S_r \subseteq r(1-m)$. 再由右正则模 R_R 有限余生成, 可知 S_r 为 R_R 本质子模. 因而 $1-m \subseteq Z_r$, 再由 $Z_r \subseteq J$ 知 $1-m \subseteq J$, 矛盾.

现由 R 为左 Kasch 环知 $l(S_l) = J$. 再由假设 $S_r \subseteq S_l$ 可得 $J \subseteq l(S_r)$. 任取 $a \in l(S_r)$, 则 $S_r \subseteq r(a)$. 又由 R_R 有限余生成知 $S_r \triangleleft R_R$, 再由 $Z_r \subseteq J$ 可得 $a \in Z_r \subseteq J$. 因此 $J = l(S_r)$, 即证 $l(S_r) = l(S_l) = J$.

最后我们证明 R 为半局部环. 因为右正则模 R_R 有限余生成, 故 S_r 为有限生

成右理想，故可设

$$S_r = a_1R + \cdots + a_nR,$$

其中 $a_i \in R$ 使得 a_iR 为极小右理想．现由

$$a_i \in a_iR \subseteq S_r \subseteq S_l,$$

可知 $Ra_i \subseteq S_l$, 从而 Ra_i 为半单左理想．设

$$Ra_i = Ra_{i1} \bigoplus \cdots \bigoplus Ra_{it_i},$$

其中 Ra_{it_i} 为极小左理想．记 $a_i = r_1a_{i1} + \cdots + r_{t_i}a_{it_i}$, 则有

$$l(a_i) \supseteq l(r_ia_{i1}) \bigcap \cdots \bigcap l(r_ia_{it_i}),$$

又因为 Ra_{it_i} 为极小左理想，故 $Rr_ia_{it_i} = Ra_{it_i}$. 所以 $Rr_ia_{it_i}$ 也为单左理想，从而 $l(r_ia_{it_i})$ 为极大左理想.

又由 $J = l(S_r)$ 可得

$$\begin{aligned} J = l(S_r) &= l(a_1R + \cdots + a_nR) \\ &= l(a_1) \bigcap \cdots \bigcap l(a_n) \\ &\supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \bigcap_{j=1}^{t_i} l(r_ia_{ij}), \end{aligned}$$

又由 $l(r_ia_{it_i})$ 为极大左理想知，$J \subseteq \bigcap\limits_{i=1}^{n} \bigcap\limits_{j=1}^{t_i} l(r_ia_{ij})$, 所以 $J = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \bigcap\limits_{j=1}^{t_i} l(r_ia_{ij}) = \bigcap\limits_{k=1}^{s} l(b_k)$, 其中 $l(b_k)$ 为极大左理想．定义映射

$$\phi : R/J \to \bigoplus_{i=1}^{s} Rb_i \text{为} \phi(r + J) = (rb_1, \cdots rb_s),$$

则 ϕ 为单同态．由于 $Rb_i \cong R/l(b_i)$ 为极小理想，$\bigoplus\limits_{i=1}^{s} Rb_i$ 为半单左 R- 模，于是 R/J 半单，即证 R 为半局部环. **证毕.**

命题 8.3.4 设 R 为右 $C2$- 环．若 R_R 具有有限 Goldie 维数，则 R 为半局部环.

证明 首先注意到右 Noether 环一定具有有限 Goldie 右维数．先证明 R_R 的任意单同态 $\sigma : R_R \to R_R$ 都为同构．由单性知 $\sigma(R_R)$ 同构于 R_R 的一个直和项. 再由右 $C2$ 条件知存在 $K \leqslant R_R$ 使得 $R_R = \sigma(R_R) \oplus K$. 若 $K \neq 0$, 则有

$$\dim(R_R) \geqslant \dim(\sigma(R_R)) + \dim(K) > \dim(\sigma(R_R)) = \dim(R_R),$$

矛盾, 故 $K=0$, 即证 σ 为同构. 又因为 R_R 具有有限 Goldie 维数, 故由 Camps-Dicks 的一个定理知 R 为半局部环.　　**证毕.**

下面我们研究 Johns 环的 Artin 性.

定理 8.3.1　设 R 为右 Johns 环. 如果 R 满足下列条件之一, 则 R 为右 Artin 环:

(1) R 为左 Kasch 环;

(2) R 为右 $C2$- 环;

(3) ${}_RR$ 具有有限 Goldie 维数;

(4) R 为半局部环.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 由上面命题 8.3.2 可知.

(2) $\Rightarrow$ (4). 因为 R 为右 Johns 环, 则 R 为右 Noether 环, 从而具有有限 Goldie 右维数. 再由上面命题 8.3.4 可知 R 为半局部环.

(3) $\Rightarrow$ (4). 易知若 R 为右 Johns 环, 则 R 为左 P- 内射环. 下证左 P- 内射为左 $C2$- 环, 从而由上面命题 8.3.4(的对称形式) 知左 Goldie 维数有限的左 $C2$- 环为半局部环. 为左 P- 内射为左 $C2$- 环, 任取 $a\in R$ 并假设存在同构 $\sigma: aR\to eR$, 其中 $e^2=e\in R$ 为幂等元. 由于 R 为左 P- 内射环, 故存在 $d\in R$ 使得 $\sigma(a)=ed$. 同理, 存在 $c\in R$ 使得 $\sigma^{-1}(e)=ac$. 由此可得 $edc=\sigma(ac)=e$, 因此 $f=ced$ 为幂等元. 故有 $af=aced=\sigma^{-1}(ed)=a$, 因而 $Ra\subseteq Rf$. 另一方面, 由 $f=c\sigma(a)$ 知 $r(a)\subseteq r(f)$. 再由左 P- 内射性知 $Rf\subseteq Ra$. 因此 $Rf=Ra$, 即证 R 为右 $C2$- 环.

最后我们证明半局部环的情形, 从而完成定理的证明. 因为 R 为右 Johns 环, 故其 Jacobson 根 $J:=radR$ 幂零. 再由 R 为半局部环知 R 为半准素环. 由著名的 Hopkins-Lecitzki 定理知 R 为右 Artin 环.　　**证毕.**

定理 8.3.2　设 R 为右 Johns 环, 如果 R 满足下列条件之一, 则 R 为右 Artin 环:

(1) 其右基座 $S_r\subseteq S_l$;

(2) 其左基座 $S_l\lhd R_R$.

证明　(1) 由 R 为右 Johns 环知, 其右理想 $Z_r=J$. 注意到 R 为右 Noether 环, 故 S_r 为有限生成右理想, 即 R_R 有限余生成. 又由假设知 $S_r\subseteq S_l$, 从而由上面命题 8.3.3 知 R 为半局部环. 又因为 R 为右 Noether 环, 故 R 满足右零化子升链条件, 故由著名的 Mewborn-Winton 定理知其右奇异理想 Z_r 幂零, 于是 J 幂零. 从而由著名的 Hopkins-Levitzki 定理知 R 为右 Artin 环.

(2) 假设 $S_l\lhd R_R$, 并注意到右基座 S_r 等于环 R 的本质右理想的交, 则有 $S_r\subseteq S_l$, 由 R 为右 Johns 环和命题 8.3.1 知 : R_R 有限余生成, 再由定理 8.3.1 可得 R 为右 Artin 环.　　**证毕.**

定理 8.3.3　设 R 为右 Johns 环. 若 R 为左凝聚环, 则 R 为右 Artin 环.

证明 因为 R 为右 Johns 环，所以每个右理想 $I \leqslant R_R$ 为零化子，于是循环模 R/I 为无挠模. 故存在直积 $(R_R)^A$(其中 A 为某指标集) 以及单同态

$$R/I \xrightarrow{f} (R_R)^A,$$

因为 R 为左凝聚环，由著名的 Chase 定理知直积 $(R_R)^A$ 作为右 R- 模平坦. 又因为 R 为右 Noether 环，所以循环模 R/I 有限表现. 再由平坦模的 Lazard 刻画知同态 f 可以由某个自由模 R^n 分解，即存在同态 $g \in Hom_R(R/I, R^n)$ 以及 $h \in Hom_R(R^n, (R_R)^A)$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} R/I & \xrightarrow{f} & R_R)^A \\ g \searrow & & \swarrow h \\ & R^n & \end{array},$$

由于 f 为单同态，所以 g 为单同态，即 R/I 可以嵌入自由模，从而 R 为右 CF-环. 又由 R 为右 Johns 环知 R_R 是有限余生成的，故 R_R 具有有限本质基座. 由此可知 R 为右 Artin 环. **证毕.**

接下来我们研究 Johns 环何时为 QF- 环.

首先我们指出，双边 Johns 环为 QF- 环. 从而只需考虑单边 Johns 环的情形.

定理 8.3.4 设 R 为双边 Johns 环，则 R 为 QF- 环.

证明 若 R 为双边 Johns 环，则对任意左理想 $K \leqslant_R R$, 及右理想 $I \leqslant R_R$, 有

$$rl(I) = I, \text{且} lr(K) = K,$$

故 R 为对偶环. 又因为 R 为右 Noether 环，故每个右理想 $I \leqslant R_R$ 有限生成. 现考虑任意同态 $f : I \to R$, 则 $\mathrm{Im} f$ 有限生成，故由对偶环的性质知存在 $g : R \to R$ 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{inc} & R \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ R & & \end{array},$$

即 R 为右内射环，从而为 QF- 环. **证毕.**

接下来我们给出一类重要的内射性条件，在此条件下右 Noether 左 P- 内射环为 QF- 环.

定理 8.3.5 设 R 为右 Johns 环. 若对任意主左理想 $I_1, I_2 \leqslant_R R$, 成立

$$r\left(I_1 \bigcap I_2\right) = r(I_1) + r(I_2),$$

则 R 为 QF- 环.

证明　首先证明 R 具有有限左 Goldie 维数. 反证法, 假设存在 $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} Ra_i \subseteq R$. 现对任意 $n \geqslant 1$, 定义 $I_n = r(a_n, a_{n+1}, \cdots)$. 则可得右理想升链

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots,$$

由 R 为右 Noether 环知存在 $m \geqslant 1$ 使得

$$I_m = I_{m+1} = \cdots,$$

所以 $r(a_{k+1}, \cdots) \subseteq r(a_k)$. 再由 $Ra_k \bigcap \bigoplus\limits_{i=k+1}^{\infty} Ra_i = 0$ 知

$$R = r\left(Ra_k \bigcap \bigoplus_{i=k+1}^{\infty} Ra_i\right) = r(Ra_k) + r\left(\bigoplus_{i=k+1}^{\infty} Ra_i\right) = r(Ra_k) + r(Ra_{k+1}) = r(Ra_k),$$

于是对任意 $k \geqslant m$ 有 $a_k = 0$, 故 R 具有有限 Goldie 维数.

再由定理 8.3.1 知 R 为右 Artin 环, 因此右零化子满足降链条件, 或等价地, 左零化子满足升链条件. 又由 R 为右 Johns 环可知 R 为左 P- 内射环, 从而对任意 $a \in R$ 有

$$rl(a) = aR,$$

又由假设对任意 $a, b \in R$ 有

$$r\left(Ra \bigcap Rb\right) = r(a) + r(b),$$

进而可知 R 为左 2- 内射环. 又由 Rutter 的一个定理知左零化子满足升链条件的左 2- 内射环为 QF- 环.　　　**证毕.**

下面定理是 Nicholson –Yousif 在 2001 年给出的.

定理 8.3.6　设 R 为右 Johns 环. 若 R 为右极小内射环, 则 R 为 QF- 环.

证明　设 xR 为环 R 的极小右理想, 则由 R 为极小内射环知 Rx 为极小左理想, 因而其右基座 $S_r \subseteq S_l$. 再由定理 8.3.2 可知 R 为右 Artin 环. 又因为 R 为右 Johns 环, 所以 R 为左 P- 内射环, 因而 R 也为左极小内射环. 熟知右 Artin 的双边极小内射环为 QF- 环.　　　**证毕.**

引理 8.3.1　(见文献 [41])R 是左右连续环且满足左理想 ACC 条件, 则 R 是 QF- 环.

证明　见文献 [41].　　　**证毕.**

引理 8.3.2　设 R 为右 Johns 环且闭左理想为左零化子, 则 R 为右 Artin. 右连续环.

证明 因为 R 是右 Johns 环，右理想为右零化子，又闭理想为左零化子，所以 R 是半准素环，又 R 为 Noether 环，所以 R 为右 Artin, 于是 R 是双边完全环，从而 $S_e \subseteq_e ({}_RR)$ 由文献 [170](Th.1.7) 知 R 是右连续环. **证毕.**

定理 8.3.7 设 R 为右 Johns 环. 若 R 为左 CS- 环，则 R 为 QF- 环.

证明 由 R 为左 CS- 环，即闭理想为直和项，由引理 8.3.2 知：R 为右 Artin 右连续环. 又 R 为左 P- 内射环则 R 为左 $C2$- 环，所以 R 是左连续环，由引理 8.3.1,R 为 QF- 环. **证毕.**

自然要问强右 Johns 环何时为 QF- 环，这引导我们回到 Faith-Menal 猜想的研究. 首先，我们将建立右 Johns 环的 Artin 性与强右 Johns 环的 QF 性的之间联系.

定理 8.3.8 设在某条件下，右 Johns 环为右 Artin 环. 若矩阵环 $M_2(R)$ 为 Johns 环，则在该条件下，R 为 QF- 环.

证明 因为矩阵环 $M_2(R)$ 为 Johns 环，所以 R 为 Johns 环. 从而由假设知 R 为右 Artin 环，于是 R 满足左零化子升链条件. 注意到 $M_2(R)$ 为 Johns 环，则 $M_2(R)$ 为左 P- 内射环，从而 R 为左 2- 内射环. 最后我们指出. 左零化子升链条件的 2- 内射环为 QF- 环. **证毕.**

由此定理以及前面关于右 Johns 环的 Artin 性的研究，立即得下面 Nicholson –Yousif 在 1998 年得到的定理.

定理 8.3.9 设 R 为任意环. 若矩阵环 $M_2(R)$ 为右 Johns 环，并且 R 满足以下条件之一，则 R 为 QF- 环

(1) R 为左 Kasch 环;

(2) R 为右 $C2$ 环;

(3) ${}_RR$ 具有有限 Goldie 维数;

(4) R 为半局部环;

(5) 其右基座 $S_r \subseteq S_l$;

(6) 其左基座 $S_l \lhd R_R$;

(7) R 为左凝聚环;

(8) 左零化子满足升链条件;

(9) 存在 R 的有限子集 X 使得 $J = r(X)$;

(10) 闭左理想为左零化子.

Bjork 曾构造了非 QF- 环的双边 Artin 环的例子，并且其上每个循环左 R- 模都可以本质地嵌入自由模. 然而，我们有下面的定理，这个定理是 Nicholson –Yousif 在 2001 年得到的.

定理 8.3.10 对任意环 R, 以下条件等价:

(1) R 为 QF- 环;

(2) R 为强 Johns 环，并且 R 为右 $C2$- 环;

(3) R 为强 Johns 环，并且 $S_r \subseteq S_l$;

(4) 矩阵环 $M_2(R)$ 为 Johns 环，并且 $S_r \subseteq S_l$;

(5) R 为右 Johns 环，并且为右极小内射环;

(6) R 为右 CF- 环，半局部环，并且为右极小内射环;

(7) 每个 2- 生成右 R- 模可以嵌入自由模，并且 R 为右 CS- 环;

(8) 每个 2- 生成右 R- 模可以本质地嵌入投射模.

证明 见文献 [112] (定理 5.9).

下面我们研究 Johns 环与模的嵌入问题的联系. 我们知道，Pardo-Asensio 曾证得每个循环右 R- 模可以本质地嵌入自由模的环 R 为右 Artin 环. 因此很自然的问题就是问右 Johns 环上循环右 R- 模何时可以本质地嵌入自由模. 对此类环，Nichoson-Yousif 在 2001 年给出了很好的刻画. **证毕**.

定理 8.3.11 对任意环 R, 以下条件等价:

(1) 每个循环右 R- 模可以本质地嵌入一个投射模;

(2) R 为右 Johns 环，且为左 Kasch 环;

(3) R 为右 Johns 环，且为右 $C2$- 环;

(4) R 为右 Artin 环，且每个右理想都是零化子;

(5) R 为右 CF- 环，并且为双边 CS- 环;

(6) R 为右 CF- 环，半完全环，并且其左基座 $S_l \triangleleft R$;

(7) R 为右 CF- 环，半局部环，并且其左基座 $S_l \triangleleft R_R$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设每个循环右 R- 模可以本质地嵌入自由模，则由 G.Pardo-G.Asensio 定理知，R 为右 Artin 环. 进而由 Hopkins 定理知 R 为半准素环. 再由每个循环右 R- 模可以嵌入自由模知对每个右理想 $I \leqslant R_R$ 有 $rl(I) = I$. 所以 R 为极小左内射环.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由上面命题 8.2 可知.

(3) $\Rightarrow$ (4). 根据著名的 Hopkins-Lecitzki 定理，只需证明 R 半准素环. 注意到 R 为右 Johns 环，因而为右 Noether, 从而 R_R 具有有限 Goldie 维数. 又因为 R 为右 $C2$- 环，故由上面命题 8.2 知 R 为半局部环. 又因为 R 为右 Johns 环，所以 Jacobson 根 $J := RadR$ 幂零.

(4) $\Rightarrow$ (5). 注意到 R 为半准素环，并且是左极小内射环，故有 $S_r = S_l$, 并且 $S_l \triangleleft R_R$. 现令 $I \leqslant R_R$ 为任意右理想，则由假设有 $rl(I) = I$. 又因为 R 为半完全环，考古存在幂等元 $e = e^2 \in R$ 以及 $B = l(I) \bigcap Re \subseteq J$ 使得 $l(T) = R(1-e) \oplus B$. 下证 $rl(I) \triangleleft eR$. 因为 $rl(T) = eR \bigcap r(B)$, 故只需证明 $r(B) \triangleleft R_R$. 但是 $B \subseteq J$, 故有 $r(B) \supseteq r(J) = S_l$. 再注意到 $S_l \triangleleft R_R$ 则可证 $rl(I) \triangleleft eR$. 因此 R 为右 CS- 环. 若 C 为循环右 R- 模，则由每个右理想都是零化子知 C 为无挠模. 再由 R 为右 Artin

环知 C 有限余生成. 从而 C 可以嵌入一个自由模, 因此 R 为右 CF- 环.

(5) ⇒ (6). 由条件及 Pardo-Asensio 的一个结果知 R_R 是有限余生成的. 再由 R 为右 CF- 环可知每个循环右 R- 模都是有限余生成的, 由此可知 R 为右 Artin 环.

(6) ⇒ (7). 我们只需证明 $S_l \lhd R_R$. 因为 R 为右 CF- 环, 并且左 P- 内射, 故 R 为左 Kasch 环. 令 $0 \neq a \in R$, 并设 $l(a)$ 包含于某个极大左理想 $L \leqslant_R R$ 中, 由此可得 $r(L) \subseteq rl(a) = aR$. 又因为 R 为左 Kasch 环, 故 $r(L)$ 为环 R 的极小右理想, 从而 R 为左极小内射环, 因此 $S_l \subseteq S_r$.

(7) ⇒ (1). 因为 R 为右 CF- 环, 所以对任意右理想 $I \leqslant R_R$ 有 $rl(I) = I$, 因此 R 为左 P- 内射环, 进而有 $S_l \subseteq S_r$. 再由 $S_l \lhd R_R$ 知 $S_l = S_r$, 不妨记为 S. 因为 R 为半局部环, 所以 S_R 有限生成, 因此 R_R 有限余生成. 再由 R 为右 CF- 环知每个循环右 R- 模都是有限余生成的, 故 R 为右 Artin 环.

进而, 若 $e^2 = e \in R$ 为局部幂等元, 则 $eS{=}Soc(eR)$ 为单模. 故 $Soc(eR)$ 为单模, 并且为 eR 的本质子模. 现设 C 为循环右 R- 模, 则 C 可嵌入某个自由模 R^n. 又因为 R 为半完全环, 存在局部幂等元 $e_1, \cdots, e_m$ 以及单同态 $\sigma : C \to \bigoplus_{i=1}^{m} e_iR$, 我们不妨假设下标 m 为极小的. 因此对任意 i 有 $\sigma(C) \bigcap e_iR \neq 0$, 因而 $\sigma(C) \supseteq Soc(e_iR)$. 因此,

$$\bigoplus_{i=1}^{m} \left(\sigma(C) \bigcap e_iR\right) \lhd R_R,$$

由此可知 $\sigma(C) \lhd R_R$, 即证每个循环右 R- 模可以本质地嵌入一个投射模. **证毕.**

由此定理可知每个有限生成右 R- 模可以本质地嵌入到一个自由模的环 R 是右 $C2$- 环, 自然要问: 是否每个右 FGF- 环都是右 $C2$- 环? 事实上, 这个问题与 FGF 猜想有着内在联系.

为了揭示这种联系, 我们需要研究 $C2$- 模的自同态环.

定理 8.3.12　设 M_R 为任意自由右 R- 模, 并设 $E := End(M_R)$ 为其自同态环. 则

$$M_R\text{为}C2\text{-模} \Leftrightarrow E\text{为右}C2\text{-环}.$$

证明　充分性. 令 $\alpha : P \to M$ 为任意单同态, 其中 P 为 M 的直和项. 并设 $\pi : M \to P$ 为相应的典范投射, 并记 $Q := \ker(\pi)$, 则有 $M = P \oplus Q$. 现将 α 扩张为 M 的自同态 $\overline{\alpha} \in E$, 其定义为 $\alpha(p+q) = \alpha(p)$. 因为 α 为单同态, 故 $\ker(\overline{\alpha}) = Q = \ker(\alpha)$. 由此可知

$$r_E(\overline{\alpha}) = \{\lambda \in E | \lambda(M) \subseteq Q\} = r_E(\pi),$$

因为 E 为右 $C2$- 环, 所以 $\pi \in E\overline{\alpha}$, 故存在 $\beta \in E$ 使得 $\pi = \beta \circ \overline{\alpha}$, 因此 $\pi \circ \beta \circ \alpha = 1_P$, 由此可知 M_R 为 $C2$- 模.

必要性. 假设存在 α 及 $\pi^2 = \pi \in E$ 使得 $r_E(\overline{\alpha}) = r_E(\pi)$, 则我们需证 $\pi \in E\alpha$.

首先我们断言 $\ker(\alpha)=\ker(\pi)$.

现记 $\pi(M)=P$, $\ker(\pi)=Q$. 则由 $\ker(\alpha)=\ker(\pi)$ 知 $P\bigcap\ker(\alpha)=0$, 故 α 在 P 上的限制 $\alpha|_P$ 为单射. 令 $i:P\to M$ 为包含映射, 则因为 M_R 为 $C2$- 模, 故存在 $\beta\in E$ 使得 $\beta\circ\alpha|_P=i$. 下证 $\beta\circ\alpha=\pi$, 从而完成定理的证明. 若 $q\in Q$, 则由 $\ker(\alpha)=\ker(\pi)$ 可知 $(\beta\circ\alpha)(q)=0=\pi(q)$; 若 $p\in P$, 则 $(\beta\circ\alpha)(p)=p=\pi(p)$. 注意到 $M=P\oplus Q$, 即证 $\beta\circ\alpha=\pi$.　　**证毕.**

推论 8.3.1　设 R 为任意环. 则对任意 $n\geqslant 1$, 矩阵环 $M_n(R)$ 为右 $C2$- 环当且仅当自由右 R- 模 R^n 为右 $C2$ 模.

由此 Nicholson- Yousif 在 2001 年就自然提出了下面的问题.

问题　右 $C2$- 环是否为 Morita 等价不变的量?

称环 R 为强右 $\boldsymbol{C2}$ 环, 如果矩阵环 $M_n(R)$ 为右 $C2$- 环, 对任意 $n\geqslant 1$.

定理 8.3.13　设 R 为任意环. 则以下条件等价:

(1) 每个右 FGF- 环为右 $C2$- 环;

(2) 每个右 FGF- 环为 QF- 环.

证明　(2) $\Rightarrow$ (1). 显然成立, (1) $\Rightarrow$ (2) 设 R 为任意右 FGF- 环. 注意到右 FGF- 环是 Morita 等价不变的, 故对任意 $n\geqslant 1$ 矩阵环 $M_n(R)$ 都是右 FGF- 环. 再由每个右 FGF- 环为右 $C2$- 环知, 对任意 $n\geqslant 1$ 矩阵环 $M_n(R)$ 都是右 $C2$- 环, 即 R 为强右 $C2$- 环.

现令 $E:=E(R_R)$, 并任取 $a\in E(R_R)$. 因为每个有限生成的右 R- 模可以嵌入一个自由模, 所以存在自由模 R^n 以及单同态 $\sigma:R+aR\to R^n$. 因为 R 为强右 $C2$- 环, 所以矩阵环 $M_n(R)$ 为右 $C2$- 环, 从而由推论 8.3.2 知自由右 R- 模 R^n 为右 $C2$- 模. 再由 $\sigma(R)\cong R$ 知 $\sigma(R)$ 为 R^n 的直和项, 因此也是 $\sigma(R+aR)$ 的直和项. 但是由 $R\lhd R+aR$ 可知 $\sigma(R)\lhd\sigma(R+aR)$. 这表明 $a\in R$, 故 $R_R=E(R_R)$ 内射. 又因为 R 为右 Kasch 环, 所以 R 是有限余生成的, 因而每个循环右 R- 模具有有限生成本质基座, 故 R 为右 Artin 环, 从而 R 为 QF- 环.　　**证毕.**

§8.4　单边自内射完全环是 QF- 环?

1966 年, B.L.Osofsky 的一个著名结果表明任何左 (或右) 完全, 双边自内射环为 QF- 环. 1976 年, Carl Faith 在其著作中猜想任何半准素的内射余生成子环为 QF- 环. 1990 年, Faith 在讨论自内射环的 QF 性时提出了下面的问题: 任何左 (或右) 完全, 右自内射环为 QF- 环. 这就是著名的 **Faith 猜想**. 尽管吸引了大量作者的深入研究, 这个问题已经迄今为止尚未解决, 即使 R 为半准素, 局部的自内射环且 Jacobson 根 $J=Rad(R)$ 满足 $J^3=0$ 的情形也未能获得证明. 2000 年, Ara-Nicholson-Yousif 的工作表明寻找 Faith 猜想的反例依赖于除环 D 上的满

足某种拓扑性质的双模的存在性.

下面这个定理是 B.L.Osofsky 在 1966 年给出的, 在环论中已有了广泛的应用.

定理 8.4.1 设 R 为左完全环, 如果 J/J^2 是作为右 R- 模有限生成的, 则 R 为右 Artin 环

证明 先证 J 是幂零的. 令 F 为 R 的有限生成右理想使得 $J=F+J^2$, 则 $J^2=FJ+J^3$. 因为 $FJ\subseteq F\bigcap J$, 所以 $J^2=F\bigcap J+J^3$. 又因为 J^2/J^3 有限生成, 所以存在有限生成右理想 $F_2\leqslant F\bigcap J^2$, 使得 $J^2=F_2+J^3$. 归纳地, 可得有限生成右理想的降链

$$F_1:=F\supseteq F_2\supseteq\cdots\supseteq F_n\supseteq\cdots,$$

其中 F_n 满足 $J^n=F_n+J^{n+1}$. 因为 R 为左完全环, 所以 R 满足有限生成右理想的降链条件, 即存在 n 使得

$$F_n=F_{n+1},$$

由此可得

$$J^n=J^{n+1},$$

又因为 R 为左完全环, 所以 Jacobson 根 $J=Rad(R)$ 是 T- 幂零的, 故有 $J^n=0$.

下面我们用归纳法证明 R 有合成列, 因而为右 Artin 环. 假设

$$J=J^2+\sum_{i=1}^{n}x_iR,\ \ x_i\in R,$$

令 $\pi:R\to R/J$ 为自然同态, 并假设 $\pi(x_i)=\overline{x}_i$ 对任意 i 成立. 因为每个 $z(\in J^2)$ 都是某些 $y_1y_2(y_1,y_2\in J)$ 的有限和, 并且存在 $r_{ij}\in R,\ \ j=1,\cdots,m$ 使得

$$y_i=\sum_{j=1}^{m}x_jr_{ij},$$

因此 $z(\in J^2)$ 为某些 $x_jr_{ij}x_tr_{kh}$ 的有限和. 但是因为 $r_{ij}x_tr_{kh}\in J$, 所以 $\overline{r}_{ij}\overline{x}_t\overline{r}_{kh}\in J/J^2$ 是某些 $\overline{x}_i\in J/J^2$ 的 R- 系数组合. 因此 $\overline{x}_j\overline{r}_{ij}\overline{x}_t\overline{r}_{kh}\in J^2/J^3$ 是某些 $\overline{x}_i\overline{x}_j\in J/J^2$ 的 R- 系数线性组合. 所以

$$J^2/J^3=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_i\overline{x}_jR,$$

即 J^2/J^3 是有限生成的 R/J- 模, 因而 J^2/J^3 有合成列. 由归纳法证知, 每个非零的 J^i/J^{i+1} 都有合成列. 又因为只有有限多个非零的 J^i/J^{i+1}, 所以这些合成列合起来可以给出 R_R 的合成列. **证毕**.

由此定理立即可得下面的定理.

定理 8.4.2　设 R 为左完全，右自内射环．如果 J/J^2 是作为右 R- 模有限生成的，则 R 为 QF- 环．

定理 8.4.3　设 R 为左完全，右自内射环．如果 J^2 是 R 的一个有限子集的右零化子，则 R 为 QF- 环．

证明　由 Utumi 的著名定理知道 R 为右 PF- 环，所以 R 具有有限生成的本质基座 $Soc(R)$. 易知 J^2 是 R 的一个有限子集的右零化子当且仅当 R/J^2 嵌入一个有限生成自由模 R^n 中，因而其基座 $Soc(R/J^2)$ 也有限生成．因此 J/J^2 有限生成，再由 Osofsky 定理知 R 为 QF- 环．　　　**证毕**.

推论 8.4.1　若 R 为左完全，右自内射环．则以下条件等价：

(1) R 为 QF- 环；

(2) 每个循环右 R- 模可以嵌入一个自由右 R- 模中．

现设 R 为任意环，我们可以归纳地定义其右基座序列如下：

$$S_1 := Soc(R_R),$$

$$S_{k+1}/S_k := Soc(R_R/S_k),$$

则我们可得环 R 的右 Loewy 升链

$$S_1 \subseteq S_2 \cdots \subseteq S_k \subseteq \cdots,$$

同样，为我们可以定义环 R 的右 Loewy 降链为

$$J \supseteq J^2 \supseteq \cdots \supseteq J^\alpha \supseteq \cdots,$$

其中对任意序数 α 归纳定义

$$J^\alpha = J^{\alpha-1} \cdot J,\ \text{若}\alpha\text{非极限序数},$$

$$J^\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} J^\beta,\ \text{若}\alpha\text{为极限序数},$$

J.Clark-D.Huynh 在 1994 年得到下面定理．

定理 8.4.4　设 R 为双边完全右自内射环，令其 Jacobson 根 $J = Rad(R)$. 如果 R 的第二右基座 S_2 作为右理想是有限生成的，则 R 为 QF- 环．

证明　首先，我们将利用归纳法证明 Loewy 序列 $S_1 \subseteq S_2 \cdots \subseteq S_k \subseteq \cdots$ 中每个右基座 S_k 都具有有限合成长度．其次，我们证明其 Jacobson 根 J 幂零．由此可知 R 为 QF- 环. 因为 R 为左完全环, 所以 R 包含正交幂等元的完备集 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 并且有直和分解

$$R = e_1R \bigoplus \cdots \bigoplus e_nR,$$

其中每个 e_iR 都是具有本质基座的一致 (uniform) 右 R- 模. 进一步, 因为 R 为右自内射环, 所以 R 的基座 $S_1 := Soc(R_R)$ 是有限生成本质右理想, 并且 R 具有有限合成长度.

若在 Loewy 序列 $S_1 \subseteq S_2 \cdots \subseteq S_k \subseteq \cdots$ 中某个右基座 $S_k \neq 0$, 则由 R 是左完全环, 我们有严格的包含关系 $S_k \subset S_{k+1}$. 进一步, 由假设知 S_2/S_1 是有限生成的, 因而具有有限长度. 因此, 既然 R 的基座 $S_1 := Soc(R_R)$ 是有限生成本质右理想, 所以 S_2 也有有限长度.

现假设当 $k \geqslant 2$ 时, Loewy 序列 $S_1 \subseteq S_2 \cdots \subseteq S_k \subseteq \cdots$ 中每个右基座 S_k 都具有有限合成长度. 则有

$$S_k/S_{k-1} = U_1 \bigoplus \cdots \bigoplus U_n,$$

其中每个 U_i 都是单右 R- 模. 又因为 R 为又 PF- 环, 从而为右 Kasch 环, 故每个单右 R- 模 U_i 都可以嵌入 R 中. 因此, 存在极小右理想 $V_1, \cdots, V_n$ 使得对任意 $i = 1, \cdots, n$ 有

$$U_i \cong V_i,$$

取内射包可得

$$E(S_k/S_{k-1}) = E(U_1) \bigoplus \cdots \bigoplus E(U_n) \cong E(V_1) \bigoplus \cdots \bigoplus E(V_n),$$

由此可得

$$\begin{aligned} E(S_k/S_{k-1})/(S_k/S_{k-1}) &\cong E(U_1)/V \bigoplus \cdots \bigoplus E(U_n)/U_n \\ &\cong E(V_1)/V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus E(V_n)/V_n, \end{aligned}$$

现对任意 V_i, 存在子模 $W_i \leqslant S_1 = S_1 := SocR$ 使得

$$S_1 = V_i \bigoplus W_i,$$

故有

$$R = E(S_1) = E(V_i) \bigoplus E(W_i),$$

因此

$$R/S_1 = E(V_i) \bigoplus E(W_i)/(V_i \bigoplus W_i) \cong (E(V_i)/V_i) \bigoplus (E(W_i)/V_i),$$

因为 R/S_1 具有有限生成的本质基座, 所以 $E(V_i)/V_i$ 具有有限一致维数. 由此可知 $E(S_k/S_{k-1})/(S_k/S_{k-1})$ 也具有有限一致维数.

易知商环 R/S_{k-1} 也为左完全环, 所以 S_k/S_{k-1} 在中 R/S_{k-1} 也是本质的. 因此

$$E(S_k/S_{k-1}) = E(R/S_{k-1}),$$

进而，由同态定理得

$$R/S_k \cong (R/S_{k-1})/(S_k/S_{k-1}),$$

所以 R/S_k 也具有有限一致维数. 因此 S_{k+1}/S_k 具有有限一致维数，因而具有有限合成长度，由归纳假设知 S_{k+1} 都具有有限合成长度. 由数学归纳法知 Loewy 升链 $S_1 \subseteq S_2 \cdots \subseteq S_k \subseteq \cdots$ 中每个右基座 S_k 都具有有限合成长度.

其次，我们证明环 R 的 Jacobson 根 J 幂零.

考虑环 R 的右 Loewy 降链

$$J \supseteq J^2 \supseteq \cdots \supseteq J^\alpha \supseteq \cdots,$$

则存在最小的序数 λ 使得对所有 $\beta \geqslant \lambda$ 有

$$J^\lambda = J^\beta,$$

如果 $J^\lambda \neq 0$, 则因为 R 为右完全环，所以 $J^\lambda \cdot J = J^{\lambda+1}$ 严格包含于 J^λ, 与序数 λ 的最小性矛盾. 所以 $J^\lambda = 0$, 并且对任意 $\alpha < \lambda$ 有 $J^\alpha \neq 0$.

现假定 λ 无穷. 令 $T_\alpha = S_1 \bigcap J^\alpha$ 并设 T_α 的合成长度为 d_α. 则我们可以得到正整数的降链

$$d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_\alpha \geqslant \cdots,$$

因为对任意 $\alpha < \lambda$ 有 $J^\alpha \neq 0$, 所以存在序数 $\delta < \lambda$ 使得对任意 $\delta < \gamma < \lambda$ 有 $d_\delta = d_\gamma$. 由此可得对任意 $\delta < \gamma < \lambda$ 有 $T_\delta = T_\gamma \neq 0$.

若 λ 为极限序数，则

$$J^\lambda = \bigcap_{\beta<\lambda} J^\beta = \bigcap_{\delta<\gamma<\lambda} J^\gamma \supseteq T_\delta \neq 0,$$

这与 $J^\lambda = 0$ 矛盾. 因此 λ 不是极限序数.

现存在最大的极限序数 ρ 使得 $J^\rho \neq 0$, 故存在自然数 t 满足 $\lambda = \rho + t$. 若令 $D = J^\rho$, 则我们有 $DJ^t = 0$, 由此我们可得下面的降链

$$D = DJ^0 \supset DJ \supset DJ^2 \supset \cdots \supset DJ^{t-1} \supset DJ^t = 0,$$

易见对任意 $i = 0, 1, \cdots, t-1$ 都有 DJ^i/DJ^{i+1} 是非零半单模. 特别，$DJ^{t-1} \subseteq S_i$ 并且 DJ^{t-1} 具有有限长度.

假定对某个 $n \leqslant t-1$, DJ^n 具有有限长度. 则易知存在 R 的某个右基座 S_i 使得 $DJ^n \subseteq S_i$, 进而可知 $DJ^{n-1}/(DJ^{n-1} \bigcap S_i)$ 为半单模，因此 $DJ^{n-1} \subseteq S_{i+1}$. 这表明 DJ^{n-1} 也具有有限长度. 由归纳假设知 D 也具有有限长度. 因此存在 R 的某个右基座 S_m 使得 $D \subseteq S_m$. 现记商环 $\overline{R} := R/S_m$, 并对任意右理想 $A \leqslant R$ 记

$\bar{A} := (A+S_m)/S_m$. 则 $\overline{S_{m+1}}$ 是 $\bar{R}$ 的右基座. 同时因为商环 $\bar{R}$ 也为左完全环, $\overline{S_{m+1}}$ 是 $\bar{R}$ 的本质子模. 进而, 由 $\overline{S_{m+1}}$ 具有有限合成长度.
显然 $\overline{J^\rho} = \bar{0}$. 则环 R 的右 Loewy 降链 $J \supseteq J^2 \supseteq \cdots \supseteq J^\alpha \supseteq \cdots$ 我们可得下面的降链

$$\bar{J} \supseteq \overline{J^2} \supseteq \cdots \supseteq \overline{J^\rho} = \bigcap_{\alpha<\rho} \overline{J^\alpha} = \bar{0},$$

现假定存在某 $\alpha < \rho$ 满足 $\overline{J^\alpha} = \bar{0}$. 则 $J^\alpha \subseteq S_m$, 故存在自然数 s 使得

$$(J^\alpha)\cdot J^s = J^{\alpha+s} = 0.$$

然而, 因为 $\alpha+s<\rho$ 并且 $J^\rho \neq 0$, 所以这是不可能的. 因此对所有 $\alpha<\rho$ 有 $\bar{J^\alpha} \neq \bar{0}$. 由此, 若令 $\overline{C_\alpha} = \overline{S_{m+1}} \bigcap \overline{J\partial}$, 则对任意 $\alpha<\rho$ 有 $\overline{C_\alpha} \neq \bar{0}$. 因为每个 $\overline{C_\alpha}$ 具有有限合成长度, 并且对任意 $\beta>\alpha$ 有 $\overline{C_\alpha} \supseteq \overline{C_\beta}$.

我们可以重复上面的论断, 从而证明 ρ 不能为极限序数. 这与 ρ 的选择矛盾. 因此 λ 是有限序数, 从而 J 幂零.

现在环 R 的 Jacobson 根 J 幂零, 并且 R 为完全环, 所以 Loewy 序列 $S_1 \subseteq S_2 \cdots \subseteq S_k \subseteq \cdots$ 中包含 R. 因而 R_R 具有有限合成长度, 由此可知 R 为 QF- 环.
证毕.

注记 W.M.Xue 在文献 [167] 证明了在上述定理中, 如果 R 的第二右基座 S_2 作为左理想是有限生成的, 则 R 依然为 QF- 环.

推论 8.4.2 设 R 为双边完全右自内射环. 如果 R 的有限生成子集 $A = \{a_1,\cdots,a_n\}$ 使得 $r(A)=r(J)$, 则 R 为 QF- 环.

证明 因为 R 为左右完全环, 所以 $l(J)=Soc(R_R)$ 并且 $r(J)=Soc(R_R)$. 进而因为 R 为右自内射环, 所以 R 为右 PF- 环, 故 $Soc(R_R)=Soc({}_RR)$. 因此 $r(J)=Soc(R_R)$.

现定义 $\psi: R_R \to a_1R\oplus\cdots\oplus a_nR$ 为对任意 $r\in R$ 有

$$\psi(r) = (a_1r,\cdots,a_nr),$$

则 ψ 是 R- 同态, 其核为

$$\ker\psi = r(A) = r(J) = Soc(R_R),$$

因此 $R/Soc(R_R)$ 可以嵌入 $a_1R\oplus\cdots\oplus a_nR$. 又因为 R 为右自内射环, 由上面定理 8.4.4 的证明我们看到 R_R 具有有限一致维数, 由此可知 $a_1R\oplus\cdots\oplus a_nR$ 也具有有限一致维数. 因此 R 的第二右基座具有有限合成长度. 由上面定理 8.4.4 可知 R 为 QF- 环. **证毕.**

注记　W.M.Xue 在文献 [167] 也证明了上述推论在单边完全环的情况下也是成立的.

引理 8.4.1　设 R 为双边完全右自内射环，其第二右基座为 S_2. 则 $J^2S_2 = 0$.

证明　首先假定对任意 $x \in R$, $(xR + S_1)/S_1$ 为单模，其中 $S_1 := Soc(R_R)$ 为环 R 的基座. 则存在极大右理想 m 满足 $xm \subseteq S_1$, 并且有

$$(xR + S_1)/S_1 \cong R/m,$$

因为 R 为右 PF- 环，同时也为右完全环，所以 $l(J) = r(J) = S_1$. 由此可知

$$Jx \subseteq l(m) \subseteq l(J) = S_1.$$

如果 $x \in S_2$, 则存在 $x = x_1 + \cdots + x_n + y$, 其中 $y \in S_1$ 而每个 $(x_iR + S_1)/S_1$ 为单模. 因此由前面证明知 $Jx \subseteq S_1$, 从而 $JS_2 \subseteq S_1$. 再由 $l(J) = r(J) = S_1$ 知, $J^2S_2 = 0$ 成立.　　　**证毕**.

Herbera-Shamsudin 在 1996 年得到了下面的定理

定理 8.4.5　设 R 为左完全，右自内射环. 如果 J/J^2 是作为左 R- 模可数生成，则 R 为 QF- 环.

证明　只需证明 R 的第二右基座 S_2 作为右理想是有限生成的. 因为 R 为左完全右 PF- 环，所以其基座 $S_1 := Soc(R_R)$ 为有限生成本质理想，同时对每个单右 R- 模 V_R 都存在一个本原幂等元 e 使得 $V_R \cong eS_1$. 因而其对偶模 $V^* := Hom_R(V_R, R_R) \cong Hom_R(eS_1, R) \neq 0$. 显然有 R 为右 HN 内射环. 如果 S_2/S_1 具有无限维数，则由 HN 内射环的性质，左 R/J- 模

$$l(S_1)/l(S_2) \cong Hom_R(S_2/S_1, R),$$

也具有不可数无限维数. 再由引理 8.4.1, $J^2 \subseteq l(S_2) \subseteq l(S_1) = J$, 故 J/J^2 是作为左 R/J- 模具有不可数无限维数，与假设矛盾. 所以环 R 的第二右基座 S_2 作为右理想是有限生成的，故 R 为 QF- 环.　　　**证毕**.

定理 8.4.6　设 R 为右 PF 单边完全环. 如果 R 的第二左基座 $r(J^2)$ 作为左理想有限生成，则 R 为 QF- 环.

证明　因为 R 为单边完全环，故存在 $x_i \in J$, $i \in I$ 使得记

$$J/J^2 = \bigoplus_{i\in I} \overline{x_i}\, R,$$

其中 $\overline{x_i} = x_i + J^2 \in J/J^2$ 满足 $\overline{x_i}\, R$ 为单右 R- 模. 所以 $J = \bigoplus_{i\in I} x_iR + J^2$ 并且

$J^2 = \bigcap\limits_{i\in I} A_i$, 这里 $A_i = \sum\limits_{\substack{k\in I\\k\neq i}} x_k R + J^2$. 同时我们也有

$$l(J^2) = l\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \supseteq \sum_{i\in I} l(A_i),$$

下证 $\sum\limits_{i\in I}(l(A_i)/l(J)) = \bigoplus\limits_{i\in I}(l(A_i)/l(J))$. 为此令 $\sum_{r_i} = 0$, 其中 $r_i \in l(A_i)$, 则对所有 $k \neq i$ 有 $r_i x_i = 0$. 从而对每个 $x_i \in J$, 都有

$$0 = \left(\sum_{i\in I} r_i\right) x_k = r_k x_k,$$

由此可知 $r_i J = r_i(A_i + x_i R) = 0$, 故对任意 $i \in I$ 有 $r_i \in l(J)$. 因此我们有

$$\sum_{i\in I}(l(A_i)/l(J)) = \bigoplus_{i\in I}(l(A_i)/l(J)),$$

(事实上, 每个 $l(A_i)/l(J)$ 都是单左 R- 模. 因为 $A_i \subseteq J$, 故对任意 $i \in I$ 有 $l(J) \subset l(A_i)$. 因为 R 为右 PF- 环, 所以 $_R(l(J))$ 有限生成. 现假定存在有限生成左理想 L 满足 $l(J) \subset L \subset l(A_i)$. 则易见 J/A_i 是单右 R- 模, 故我们有 $L = l(A_i)$. 因此 $l(A_i)/l(J)$ 都是单左 R- 模.)

最后我们证明 $|I| < \infty$. 因为 R 的第二左基座 $r(J^2)$ 作为左理想有限生成, 而作为左 R- 模有

$$l(J^2)/l(J) \supseteq \sum_{i\in I}(l(A_i)/l(J)) = \bigoplus_{i\in I}(l(A_i)/l(J)),$$

所以 $|I| < \infty$. **证毕.**

由上述定理可直接得到下列推论.

推论 8.4.3 设 R 为右 PF 单边完全环. 如果 R 的有限生成子集 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 使得 $J^2 = r(A)$, 则 R 为 QF- 环.

推论 8.4.4 设 R 为左完全右自内射环. 如果 R 的有限生成子集 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 使得 $J^2 = r(A)$, 则 R 为 QF- 环.

近年来, 陈建龙、 Nicholson-Yousif 等人保留了 Faith 猜想的完全性条件, 而将内射性条件削弱, 从而推广了 Osofsky, Faith, Clark-Huynh, Herbera-Shamsuddin 以及薛卫民等人的经典结果.

首先考虑左完全右 A- 内射环为 QF- 环的条件. 一个环 R 称为右 A- **内射环**, 如果对 R 的右理想对 A, B 以及 R 的任意 $x \in R$ 有 $lr(x) = Rx.l(A\bigcap B) = l(A) + l(B)$. 由此可见 A- 内射环类处于自内射环类与 f- 内射环类之间. 下面这个定理的证明可以在陈建龙的博士学位论文第 7 章中找到.

定理 8.4.7　设 R 为左完全右 A- 内射环，如果 R 满足如下条件之一，则 R 为 QF- 环：

(1) J/J^2 为可数生成左 R- 模；

(2) R 的第二右基座 S_2 为有限生成右 R- 模；

(3) $R/Soc(R)$ 为有限余生成左 R- 模；

(4) 存在有限生成左理想 I 使得 $r(J) = r(I)$.

接下来考虑左完全右单内射环 (单内射性的定义见第 6 章) 的情形．一个环 R 成为左半对偶环，如果其左零化子之和依然为左零化子 (见文献 [167] .) 下面这个定理的证明也可从陈建龙的博士学位论文第 7 章和我们本书的第 6 章中找到．

定理 8.4.8　设 R 为左完全右单内射环，如果 R 满足下列条件之一，则 R 为 QF- 环：

(1) R 为左半对偶环 (即左零化子之和为左零化子)；

(2) R 为左单内射环；

(3) 对任意 $b \in R$ 以及左理想 $I \leqslant_R R$, 有 $r\,(Rb \bigcap I) = r(Rb) + r(I)$ ；

(4) R 为单边伪凝聚环；

(5) R 的第二基座 S_2 为可数生成左 R- 模．

事实上，还可以将 Faith 猜想中完全性条件和内射性条件同时削弱，从而研究更广的环类，例如我们前面介绍过的 GPF- 环．这些环类的 quasi-Frobenius 性最近几年得到了越来越多的重视．参见第 7 章．

§8.5　Ara-Nicholson-Yousif 的例子

尽管许多作者证明了 Faith 猜想在某些特殊条件下成立，但是这些条件离 Faith 猜想的完全解决还很远．例如， 1994 年 J.Clark-D.Huynh 的研究表明，为证明或否定 Faith 猜想，我们只需考察环 R 的第二右基座 S_2 作为右理想是否有限生成．但是这并不是一件容易的工作．例如，考虑半准素的右自内射环 R 其 Jacobson 根 $J := radR$ 满足 $J^3 = 0, J^2 \neq 0$. 则 R 只有三个右基座

$$0 \subseteq S_1 := Soc(R_R) \subseteq S_2 \subseteq S_3 = R,$$

因为 R 为自内射环，所以 $S_1 := Soc(R_R)$ 有限生成．然而，迄今为止我们还不知道 R 的第二右基座 S_2 作为右理想是否有限生成．

1977 年 Lawrence 的一些有趣的工作表明 Faith 猜想的反例一定是不可数的，或者，如果它为域上代数的话，一定具有不可数维数．

Lawrence 的工作实际上是对 QF- 环的很好的内刻画，现详细介绍如下．

定理 8.5.1　设 R 为任意有单位元的环．则

(1) 若 R 为 QF- 环，则 R 的每个可数子环都包含在一个可数 QF- 子环中；

(2) 若 R 的每个可数子环都包含在一个 QF- 子环中，则 R 为 QF- 环.

证明 (1) 假设 S 为环 R 的可数子环. 我们将归纳地构造子环的序列

$$S_0 := S \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \cdots \subseteq R,$$

如下：对给定的 S_k, 考虑集合

$$\Omega_k := \{(a_1, \cdots a_n) \in {S_k}^n | n\text{取遍所有自然数}\},$$

若 $a_n \in a_1R + \cdots + a_{n-1}R$, 则选择 $r_1, \cdots, r_{n-1} \in R$ 使得 $a_n = a_1r_1 + \cdots a_{n-1}r_{n-1}$；若 $a_n \notin a_1R + \cdots + a_{n-1}R$, 则选择 $r_n \in R$ 使得 $r_na_i = 0$ 对任意 $i = 1, \cdots, n-1$, 并且 $r_na_n = 0$. 对于由 $a_1, \cdots, a_{n-1}$ 生成左理想的情形也同样可得相应的 $r'_1, \cdots, r'_n \in R$. 构造

$$S_{k+1} := < S_k, r_1, \cdots, r_n, r'_1, \cdots, r'_n >$$

为由 S_k,$r_1, \cdots, r_n$,$r'_1, \cdots, r'_n$ 生成的子环. 现令 $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, 则 T 显然为可数子环，并且 $S \subseteq T$, 故只需证明 T 为 QF- 环.

因为 R 为 QF- 环，故为双边 Artin 环，从而 R 满足双边零化子的升链条件和降链条件. 若 I 为 R 的有限生成右理想，则由构造知 $r_R(l_R(I)) = I$. 同理，任意有限生成左理想也为零化子. 因此 T 满足有限生成左、右理想的升链条件，从而 T 为双边 Noether 环. 又因为 T 满足左、右零化子的降链条件，因此 T 为双边 Artin 环. 最后由 T 为满足零化子的双边 Artin 环知 T 为 QF- 环. 至此我们已经证明环 R 的每个可数子环都包含在一个可数 QF- 子环中.

(2) 现假设 R 的每个可数生成子环都包含在一个 QF- 子环中，则显然 R 为双边 Artin 环. 为证 R 为右自内射环，需证对每个有限生成右理想 I_1, I_2 有

$$rl(I_1) = I_1, \quad \text{并且} l\left(I_1 \bigcap I_2\right) = l(I_1) + l(I_2),$$

然而，若这两个条件不能满足，则我们可以构造一个可数子环 S 使得任意介于 S 与 R 之间的子环都不满足这两个条件. 这与 S 一定包含于某个 QF- 子环矛盾. **证毕**.

Lawrence 在 1977 年得到下面定理：

定理 8.5.2 每个可数的单边自内射环为 QF- 环.

证明 设 R 为任意右自内射环，并设 $\{I_i | i \in \psi\}$ 为以集合包含关系良序化的左零化子降链. 我们将证明其指标集基数 $|\psi| < |R|$. 从而由定理 8.5.1 知，环 R 为 QF- 环当且仅当每个可数子环都包含在一个可数自内射子环中，由此完成定理证明.

假设 $|\psi| \geqslant |R|$. 不妨假设 ψ 为序数集, 并令 $\Phi := \{j \in \Psi | j < |\psi|\}$, 则 $|\Phi| = |R|$, 故可假设 $R = \{r_j | j \in \Phi\}$. 现考虑左零化子降链 $\{I_j | j \in \Phi\}$, 并令 $I = \bigcap_{j\in\Phi} I_j$. 对任意 $j \in \Phi$, 假设 $K_j \leqslant R_R$ 为右理想使得 $I_j = l(K_j)$, 并令 $K = \bigcup_{j\in\Phi} K_j$, 则显然有 $I = l(K)$.

我们断言对任意 $\alpha \in \Phi$, 存在元素 $b_\alpha \in I$ 以及 R- 同态 $\varphi_\alpha : \sum_{\rho\leqslant\alpha} b_\rho R \to R_R$ 使得:

(1) 若 $\beta < \alpha$, 则 $\varphi_\alpha : \sum_{\rho\leqslant\alpha} b_\rho R \to R_R$ 在 $\sum_{\rho\leqslant\beta} b_\rho R$ 上的限制为 $\varphi_\beta : \sum_{\rho\leqslant\beta} b_\rho R \to R_R$;

(2) $\varphi_\alpha(b_\alpha) \neq r_\alpha b_\alpha$.

我们将利用超限归纳法证明此断言. 若 $\alpha = 1$, 选择 $c_1 \in I_1$ 使得 $c_1 - a_1 \notin I$. 则存在 $b_1 \in K$ 使得 $(c_1 - a_1)b_1 \neq 0$. 故可定义 $\varphi_1 = c_1\cdot$ 为 $c_1 \in I_1$ 左乘. 现假设我们已经对所有 $< \delta$ 的序数证明了断言成立. 则定义右 R- 模同态

$$\varphi'_\delta : \sum_{\rho<\delta} b_\rho R \to R_R$$

为所有 $\varphi_\rho(\rho < \delta)$ 的并. 因为 R 为右自内射环, 故 $\varphi'_\delta : \sum_{\rho<\delta} b_\rho R \to R_R$ 可表为某个 $d_\delta \in R$ 的左乘. 设 λ 为充分大的序数使得 $\{b_j | j < \lambda\} \subseteq I_\lambda$. 选择 $c_\delta \in I_\lambda$ 使得 $c_\delta + d_\delta - r_\delta \in I$, 进而存在 b_δ 使得 $(c_\delta + d_\delta - r_\delta)b_\delta \neq 0$. 定义 φ_δ 为 $c_\delta + d_\delta$ 的左乘. 由超限归纳法, 断言的证明完成.

现定义 R- 同态 $\varphi : \sum_{\rho\in\Phi} b_\rho R \to R_R$ 为所有 $\varphi_\alpha : \sum_{\rho\leqslant\alpha} b_\rho R \to R_R$ 的并. 则对任意 $\alpha \in \Phi$, $\varphi : \sum_{\rho\in\Phi} b_\rho R \to R_R$ 在 $\sum_{\rho\leqslant\alpha} b_\rho R$ 上的限制恰好就是 $\varphi_\alpha : \sum_{\rho\leqslant\alpha} b_\rho R \to R_R$. 因此

$$\varphi(b_\alpha) = \varphi_\alpha(b_\alpha) \neq r_\alpha b_\alpha,$$

故 $\varphi : \sum_{\rho\in\Phi} b_\rho R \to R_R$ 不能表为 R 中元素的左乘, 与 R 为任意右自内射环矛盾. 即证 $|\psi| < |R|$.　　**证毕.**

这个定理有一个有趣的推论.

推论 8.5.1　任意域 k 上可数维自内射代数为 QF- 代数.

由 Lawrence 定理还可以得到 Renault 关于群代数自内射性的经典结果.

推论 8.5.2　设 F 为任意域, G 为任意群. 若群代数 FG 为自内射, 则群 G 为有限群.

证明 任意域 F 上自内射群代数 FG 为 quasi-Frobenius 代数，从而为 Artin 代数，因此群 G 为有限群. **证毕.**

2000 年， Koike 证明了对于 "不太大" 的环 Faith 猜想成立，见下面定理.

定理 8.5.3 对任意环 R, 以下条件成立

(1) 设 R 为右 PF 单边完全环，且商环 R/J 不可数，则 R 为 QF- 环.

(2) 设 R 为右自内射半准素环，且其基数满足 $|R/J| < |R|$, 则 R 为 QF- 环.

证明 见文献 [84], (推论 3.10).

同时， Koike 证明了如果所有的右自内射半准素环 R 都满足条件 $l(S_2) = J^2$, 那么为证明 Faith 猜想只需考虑右自内射半准素环 R 且其 Jacobson 根满足 $J^3 = 0$ 的情形.

定理 8.5.4 对任意环 R, 以下条件等价：

(1) 每个满足 $l(S_2) = J^2$ 的自内射半准素环为 QF- 环;

(2) 每个 Loewy 升链与 Loewy 降链相同的右自内射半准素环为 QF- 环;

(3) 每个 Loewy 长度 $\leqslant 3$ 的自内射半准素环是 QF- 环.

证明 见文献 [84]

2000 年， Ara-Nicholson-Yousif 的工作表明，寻找 Faith 猜想的反例依赖于除环 D 上的满足某种拓扑性质的双模的存在性. 因为他们的工作包含了一些有趣的富有启发性的思想，下面我们将详细介绍他们的工作.

设 S 为任意环，且 ${}_SV_S$, ${}_SW_S$, ${}_SP_S$ 为双模. 称由 $(v, w) \mapsto vw$ 定义的映射 $V \times W \to P$ 为 **双线性映射**, 如果任意 $v, v_1 \in V$, $w, w_1 \in W$, $s \in S$ 有：

(1) $(v + v_1)w = vw + v_1 w$, 并且 $(sv)w = s(vw)$;

(2) $v(w + w_1) = vw + vw_1$, 并且 $v(ws) = (vw)s$;

(3) $(vs)w = v(sw)$. **证毕**

注意，这等价于存在 (S, S)- 双模映射 $V \otimes_S W \to P$. 但是我们真正感兴趣还是 $S = D$ 为除环的情形.

定义 8.5.1 设 D 为除环， ${}_DV_D$ 与 ${}_DP_D$ 为非零双模，并假设存在双线性映射 $V \times V \to P$. 记

$$R = [D, V, P] = D \bigoplus V \bigoplus P,$$

并定义 R 的乘法为

$$(d + v + p)(d_1 + v_1 + p_1) = dd_1 + (dv_1 + vd_1) + (dp_1 + vv_1 + pd_1),$$

易知 R 为结合环当且仅当乘积 $V \times V \to P$ 为双线性. 环 R 的矩阵表示为

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} d & v & p \\ 0 & d & v \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} : d \in D, v \in V, p \in P \right\},$$

首先，我们收集一些关于环 R 的常用性质如下，这些性质以后会经常用到.

引理 8.5.1　环 $R=[D,V,P]$ 具有以下性质:

(1) R 为结合环当且仅当乘积 $V\times V\to P$ 为双线性;

(2) $VP=PV=P^2=0$;

(3) R 为局部环，且 $J=V\oplus P$,　$J^2=V^2\subseteq P$,　$J^3=0$;

(4) R 的基座 $Soc(R_R)=l(J)=l_V(V)\oplus P\lhd R_R$;

(5) 对任意 $x\in Soc(R_R)$ 有 $xR=xD$;

(6) 如果 $X_D\subseteq V$, 则 $X\oplus P$ 为 R 的右理想; 并且每个满足 $P\subseteq T\subseteq J$ 的右理想 T 都具有 $X\oplus P$ 的形式，其中 $X\subseteq V$;

(7) $Soc(R_R)$ 的每个右 D - 子空间都是 R 的右理想;

(8) 设 X 与 Y 为 $Soc(R_R)$ 的右 D- 子空间，则每个 D- 线性变换 $X\to Y$ 都是 R- 线性的.

证明　(1) 和 (2) 是属于常规的验证内容，(3) 显然，映射 $(d+v+p)\mapsto d$ 是环 R 到 D 的同态，其核为 $V\oplus P$. 由此可知 R 为局部环，其 Jacobson 根为 $J:=RadR=V\oplus P$.

(4) 由 (3) 知 R 为半准素环，所以 $Soc(R_R)\lhd R_R$. 同时因为 R 为半局部环，所以 $Soc(R_R)=l(J)$. 现有

$$l(J)=\{d+v+p|dV=0,\text{且}dP+vV=0\},$$

又因为 $V\neq 0$, 所以 $d=0$, 从而 $vV=0$. 因此 $l(J)=l_V(V)\oplus P$. 另一边包含关系是显然的，故 $l(J)=l_V(V)\oplus P$.

(5) 如果 $x=v+p\in Soc(R_R)$, 其中 $vV=0$, 则

$$xR=\{vd+pd|d\in D\}=xD.$$

(6) $X\oplus P$ 为 R 的右理想是显然的. 给定 $P\subseteq T\subseteq J$, 则由模律可得 $T=(T\bigcap V)\oplus P$.

(7) 利用 $Soc(R_R)=l_V(V)\oplus P$ 直接计算可知.

(8) 若 $r=d+v+p\in R$, 则由 (2) 和 (4) 可得 $xr=xd$.　　**证毕.**

注记　由 (5) 可知，右理想 $T\subseteq Soc(R_R)$ 为单模当且仅当 $\dim_D(T_D)=1$. 接下来，我们将证明若 $\dim(P_D)=1$, 则 (6) 和 (7) 的逆命题也成立. 由此，我们可以刻画环 $R=[D,V,P]$ 的右理想.

引理 8.5.2　设环 $R=[D,V,P]$, 并且 $\dim(P_D)=1$. 则环 R 的真右理想为

$$\{X\bigoplus P|X_D\subseteq V\}\text{与}\{Y|Y_D\subseteq Soc(R_R)\}.$$

证明　由上面引理 8.5.1 的 (6) 和 (7) 知，$\{X\oplus P|X_D\subseteq V\}$ 与 $\{Y|Y_D\subseteq Soc(R_R)\}$ 为环 R 仅有的右理想. 如果 $T\neq R$ 为环 R 的真理想，则由 R 为局部

环知 $T \subseteq J$. 又因为 P_R 为单模, 所以或者 $P = T$ 或者 $P \bigcap T = 0$. 假设 $P = T$, 则由上面引理 8.5.1 的 (6) 可知存在 $X_D \subseteq V$ 使得 $T = X \oplus P$. 若 $P \bigcap T = 0$ 成立, 我们将证明 $T \subseteq Soc(R_R)$. 为此令 $t = v + p \in T$, 则对任意 $v_1 \in V$ 有 $vv_1 = (v+p)v_1 \in P \bigcap T = 0$. 因此 $v \in l_V(V)$, 故 $t \in l_V(V) \oplus P = Soc(R_R)$. **证毕.**

注记 由此引理可知, 若 $\dim(P_D) = 1$, 则环 R 的真双边理想为

$$\{X \bigoplus P|_D X_D \subseteq V\} 与 \left\{Y|_D Y_D \subseteq (l_V(V) \bigcap r_V(V)) \bigcap P\right\}.$$

下面我们研究何时环 $R = [D, V, P]$ 为右 Artin 环.

命题 8.5.1 在环 $R = [D, V, P]$ 上, 以下条件等价:

(1) 维数 $\dim(V_D) < \infty$, 并且 $\dim(P_D) < \infty$;

(2) 维数 $\dim(R_D) < \infty$;

(3) R 为右 Artin 环;

(4) R 为右 Noether 环.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) 是显然的, (4) $\Rightarrow$ (1), 假设 R 为 Noether 环, 并设

$$X_1 \subset X_2 \subset \cdots$$

为 V_D 的子模序列. 则由上面引理 8.5.1(6) 可得环 R 的右理想升链

$$X_1 \bigoplus P \subset X_2 \bigoplus P \subset \cdots,$$

由此可得 $\dim(V_D) < \infty$. 再由上面引理 8.5.1(7) 可知 P 的每个 D- 子空间都是环 R 的右理想, 因此 $\dim(P_D) < \infty$. **证毕.**

为了能研究 Faith 猜想, 我们必须刻画出何时环 $R = [D, V, P]$ 为有自内射环. 为此, 我们先从较弱的极小内射性开始.

命题 8.5.2 在环 $R = [D, V, P]$ 上, 以下条件等价:

(1) R 为右极小内射环;

(2) $l_V(V) = 0$ 并且 $\dim({}_D P) = 1$.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $0 \neq p_0 \in P$ 且 $u \in l_V(V)$, 若定义 $\gamma: p_0 D \to (u + p_0)D$ 为 $\gamma(p_0 d) = (u + p_0)d$, 则由上面引理 8.5.1(8) 知 γ 为 R- 线性. 又因为 R 为右极小内射环, 所以 γ 可以表为某个 $c \in R$ 的左乘. 从而 $u + p_0 = \gamma(p_0) = cp_0$. 因此 $u = 0$, 进而 $l_V(V) = 0$. 如果 $0 \neq p \in P$, 则 $pR = pD$ 为单模, 因而由环 R 的极小内射性知 $lr(p) = Rp$. 再由上面引理 8.5.1(4) 可得

$$Dp = Rp = lr(p) = l(J) = l_V(V) \bigoplus P = P,$$

所以 $\dim({}_D P) = 1$.

(2) ⇒ (1). 令 K_R 为环 R 的极小右理想, 并设 $\gamma: K_R \to R_R$ 为 R- 线性映射. 我们需证 γ 可表示为 R 中某元素的左乘. 由 (2) 知 $Soc(R_R) = P$, 因而 $K \subseteq P$. 再由上面引理 8.5.1(7) 知 $\dim(K_D) = 1$. 故存在 $p_0 \in P$ 使得 $K = p_0 D$. 因为 $\gamma(K)$ 为单模, 所以 $\gamma(K) \subseteq Soc(R_R) = P = Dp_0$. 再由 (2), 存在 $d_0 \in D$ 使得 $\gamma(p_0) = d_0 p_0$. 因此对任意 $d \in D$ 有

$$\gamma(p_0 d) = \gamma(p_0) d = (d_0 p_0) d = d_0 (p_0 d),$$

即证 $\gamma(-) = d_0 \cdot -$.　　**证毕**.

注记　因为我们假定 $P \neq 0$, 所以上面引理 8.5.1(4) 和 (7) 给出

$$Soc(R_R)\text{为极小右理想} \Leftrightarrow l_V(V) = 0\text{并且}\dim(P_D) = 1.$$

下证条件 $\dim(P_D) = 1$ 成立仅当环 $R = [D, V, P]$ 为右单内射环.

引理 8.5.3　设环 $R = [D, V, P]$ 为右单内射环, 则

$$l_V(V) = 0, \quad \text{且} \dim(P_D) = 1 = \dim({}_D P)$$

证明　因为 R 为右 $sim-$ 内射环, 所以 R 为右 $min-$ 内射环, 故 $l_V(V) = 0$, 且 $\dim({}_D P) = 1$. 现假定 $\dim(P_D) \geqslant 2$, 并令 $\{p_1, p_2, \cdots\}$ 为 P_D 的一组 D- 基. 定义映射 $\alpha: P_D \to P_D$ 为

$$\alpha(p_1) = p_2, \text{且}\alpha(p_i) = 0 \ \ \text{对任意}i \geqslant 2\text{成立},$$

则由上面引理 8.5.1(8) 知 α 为 R- 线性映射. 又因为 $\mathrm{Im}(\alpha) = p_2 D$ 为单模, 所以由 $sim-$ 内射性知存在某个 $a \in R$ 使得 $\alpha(-) = a \cdot -$. 若 $a = d + v + p$, 则 $\alpha(p_i) = ap_i = dp_i$ 对任意 i 成立. 特别由 $\alpha(p_2) = 0$ 知 $d = 0$. 但是由此可得 $p_2 = \alpha(p_1) = dp_1 = 0$, 矛盾.　　**证毕**.

下证环 $R = [D, V, P]$ 为右 $sim-$ 内射性当且仅当 $R = [D, V, P]$ 为右自内射环. 为了能更好地刻画环 $R = [D, V, P]$ 的自内射性, 我们需要下面的

分离条件　若 $V = xD \oplus M_D$, 其中 $x \neq 0$, 则存在 $v_0 \in V$ 使得 $v_0 x = 0$ 且 $v_0 M = 0$.

注记　分离条件的一个等价说法为: 若 $x \in V \backslash X$, 其中 $X_D \subseteq V$ 为任意子空间, 则存在 $v_0 \in V$ 使得 $v_0 x = 0$ 且 $v_0 X = 0$. 这实际上就是拓扑学中的分离公理.

定理 8.5.5　在环 $R = [D, V, P]$ 上, 以下条件等价:

(1) R 为右自内射环;

(2) R 为右 $min-$ 内射环;

(3) $l_V(V) = 0$, 且 $\dim(P_D) = 1 = \dim({}_D P)$, 并且分离条件成立.

证明 (2) ⇒ (3). 只需证明环 $R=[D,V,P]$ 满足分离条件. 取定 $0\neq q\in P$, 并令 $V_D=xD\oplus M$, 其中 $x\neq 0, M\subseteq V_D$. 现定义 $\beta: V\oplus P=xD\oplus M\oplus P\to P$ 为

$$\beta(xd+m+p)=qd,$$

因为 D 为除环, 所以 β 是定义好了的. 同时由

$$\begin{aligned}\beta((xd+m+p)(d_1+m_1+p_1)) &= \beta(xdd_1+md_1+(xdp_1+mv_1+pd_1))\\ &= q(dd_1)=qd(d_1+v_1+p_1)\\ &= (\beta(xd+m+p))(d_1+m_1+p_1)\end{aligned}$$

可知 β 为 R- 线性映射. 因为 $\beta(V\oplus P)=qD$ 为单模, 由 (2) 知 $\beta=b\cdot$ 为某个 $b\in R$ 的左乘. 记 $b=d_0+v_0+p_0$, 则 $q=\beta(x)=bx=d_0x+v_0x$. 因而有 $v_0x=q\neq 0$ 并且 $d_0x=0$. 这表明 $d_0=0$, 由此可得对任意 $m\in M$ 有 $v_0m=bm=\beta(m)=0$, 即证分离条件成立.

(3) ⇒ (1). 设 $T\subseteq R$ 为右理想, 令 $\alpha: T\to R_R$ 为 R- 线性映射. 我们需证 α 可表示为 R 中某元素的左乘. 现假定 $0\subseteq T\subseteq J$. 因为 $Soc(R_R)=l_V(V)\oplus P=P$ 为单模, 由 (3) 知存在子空间 $X_D\subseteq V$ 使得

$$T=X\bigoplus P,$$

又由 R 的右 $min-$ 内射性知, 存在 $a\in R$ 使得 $\alpha|_P=a$.

论断 若 $x\in X$, 则 $\alpha(x)-ax\in P$.

现定义 $\beta: T\to R$ 为 $\beta=\alpha-a$. 如果能证明存在 $b\in R$ 使得 $\beta=b$, 那么 $\alpha=(a+b)$, 即可完成定理证明. 因为 $\alpha|_P=a$, 所以 $P\subseteq\ker(\beta)$. 故由前面的论断知 $\beta(T)=\beta(X\oplus P)=\beta(X)\subseteq P$. 若 $\beta\neq 0$, 则由 $\dim(P_D)=1$ 可得 $\beta(T)=P$. 再由 $P\subseteq\ker(\beta)\subseteq X\oplus P$ 可知 $\ker(\beta)=Y\oplus P$, 其中 $Y=X\bigcap\ker(\beta)$. 因此

$$\frac{X}{Y}\cong\frac{X\bigoplus P}{Y\bigoplus P}=\frac{T}{\ker(\beta)}\cong\beta(T)=P,$$

由此可得 $\dim_D\left(\dfrac{X}{Y}\right)=1$. 因而, 如果我们选择 $x\in X\backslash Y$, 则作为 $D-$ 子空间有 $X=xD\oplus Y$. 由此有

$$T=xD\bigoplus Y\bigoplus P=xD\bigoplus\ker(\beta),$$

取子空间 $M\supseteq\ker(\beta)$, 使得 $V_D=xD\oplus M$. 则分离公理表明存在 $v_0\in V$ 使得 $v_0M=0$ 且 $v_0x\neq 0$. 因此, 由 $\dim({}_DP)=1$ 可得 $P=Dv_0x$. 记 $\beta(x)=d_0v_0x$, 其中 $d_0\in D$. 因而由 $v_0y\in v_0Y\subseteq v_0M=0$ 可得

$$\beta(xd+y+p)=\beta(xd)=\beta(x)d=(d_0v_0x)d=d_0v_0(xd+y+p),$$

由此可得 $\beta=(d_0v_0)$. **证毕.**

例 8.5.1 设 D 为除环. 若环 $R=[D,V,P]$ 为右 $min-$ 内射环，并且满足分离条件，则 $R=[D,V,P]$ 为右自内射环吗？

注记 设 D 为除环. 令环 $R=[D,V,P]$ 满足分离条件，并且 $\dim(P_D)=1$. 若此时有 $\dim({}_DP)=1$, 则由 R 满足分离条件知 $r_V(V)=0$, 从而 R 为左 $min-$ 内射环.

下面我们证明 Faith 猜想与除环上满足一定条件的双线性映射的存在性有关.

定理 8.5.6 假定存在除环 D 上的双线性映射 $V\times V\to P$ 满足以下条件:

(1) $l_V(V)=0$, 且 $\dim(P_D)=1=\dim({}_DP)$;

(2) 分离条件成立;

(3) 维数 $\dim(V_D)=\infty$.

那么 Faith 猜想不成立.

证明 环 $R=[D,V,P]$ 为局部环且 $J^3=0$, 并且 $R=[D,V,P]$ 为右自内射环. 然而，$R=[D,V,P]$ 并非右 Artin 环，故 $R=[D,V,P]$ 非 QF- 环. **证毕.**

注记 如定理中条件 (1) 与 (2) 成立，则此定理表明环 $R=[D,V,P]$ 为 Faith 猜想的反例当且仅当维数 $\dim(V_D)=\infty$.

下面，我们给出 $R=[D,V,P]$ 为 Faith 猜想反例的矩阵条件.

设 ${}_DV$ 为无限维 D- 线性空间，其基为 $\{e_i|i\in I\}$. 令 $RFM_I(D)$ 为 D 上的行有限 $I\times I$ 矩阵. 给定 ${}_DV$ 的双模结构 ${}_DV_D$, 我们可以定义环同态 $\rho:D\to RFM_I(D)$ 为

$$\rho(d)=[\rho_{ij}(d)],\quad 其中 e_id=\sum_{k\in I}\rho_{ik}(d)e_k,$$

反之，每个双模 ${}_DV_D$ 都可以由这样的 $\rho:D\to RFM_I(D)$ 来表示. 同样，如果 $\{f_k|k\in K\}$ 为 V_D 的一组基, 则我们可得双模 ${}_DV_D$ 的伴随表示 $\psi:D\to CFM_K(D)$, 其中 $CFM_K(D)$ 为 D 上的列有限 $K\times K$ 矩阵

$$\psi(d)=[\psi_{ij}(d)],\quad 其中 df_k=\sum_{i\in K}\psi_{ik}(d),$$

若 $A\in M_{I\times K}(D)$ 为任意 $I\times K$ 矩阵，则我们定义乘积 $V\times V\to D$, 记作 $(v,w)\mapsto v\cdot w$, 为对任意 $v=\sum_{i\in I}v_ie_i$ 及 $w=\sum_{k\in K}f_kw_k$ 有 $e_i\cdot f_k=a_{ik}$

$$v\cdot w=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}v_ia_{ik}w_k.$$

易知此定义满足双线性映射的除 $(vd)w=v(dw)$ 以外的所有公理. 因为 $e_i\cdot f_k=a_{ik}$, 我们有

$$(e_id)\cdot f_k=e_i\cdot(d\cdot f_k)\Leftrightarrow\sum_j\rho_{ij}(d)a_{jk}=\sum_m a_{im}\psi_{mk}(d),$$

由此可知上面定义的乘积 $V \times V \to D$ 为双线性映射当且仅当对任意 $d \in D$ 有

$$\rho(d)A = A\psi(d),$$

定理 8.5.7 给定双模 ${}_DV_D$, 令 $\{e_i|i \in I\}$ 与 $\{f_k|k \in K\}$ 分别为 ${}_DV$ 与 V_D 的基, 并假设存在 $I \times K$ 矩阵 $A \in M_{I\times K}(D)$ 满足 $\rho(d)A = A\psi(d)$ 对任意 $d \in D$ 成立. 则以下条件等价:

(1) 环 $R = [D, V, P]$ 为 Faith 猜想反例;

(2) 矩阵 $A \in M_{I\times K}(D)$ 的行向量构成直积 D^K 的一组 D- 基.

证明 只需证明以下两个论断:

(a) $l_V(V) = 0$ 成立当且仅当矩阵 $A \in M_{I\times K}(D)$ 的行向量相互独立.

(b) 环 $R = [D, V, P]$ 满足分离条件当且仅当矩阵 $A \in M_{I\times K}(D)$ 的行向量生成 ${}_D(D^K)$.

首先证明论断 (a). 给定 $v = \sum_i v_i e_i \in V$, 记 $\overline{v} =< v_i >\in D^{(I)}$. 注意到 $v \cdot f_k = \sum_i v_i(e_i \cdot f_k) = \sum_i v_i a_{ij}$, 则有

$$< v \cdot f_k >= \overline{v}A.$$

因此若 $v \in V$, 则 $v \cdot V = 0$ 当且仅当对任意 $k \in K$ 有 $v \cdot f_k = 0$ 当且仅当 $\overline{v}A = 0$. 因为矩阵 $A \in M_{I\times K}(D)$ 的行向量相互独立当且仅当 $\overline{v}A = 0$ 蕴涵 $\overline{v} = 0$, 故论断 (a) 成立.

现假设环 $R = [D, V, P]$ 满足分离条件. 取 $0 \neq \overline{b} =< b_k >\in D^K$, 令 $P \in CFM_K(D)$ 为以 $\overline{b}$ 为 0 行的可逆矩阵. 定义

$$< f'_k >=< f_k > P^{-1}.$$

故 $\{f'_k|k \in K\}$ 为 V_D 的一组基. 由分离条件可令 $v_0 \in V$ 满足

$$v_0 \cdot f'_k = \begin{cases} 1, 若k = 0 \\ 0, 若k \neq 0, \end{cases}$$

注意到

$$v_0 \cdot f_k = v_0 \cdot \left(\sum_l f'_l p_{lk} \right) = \sum_l (v_0 \cdot f_l{}')p_{lk} = p_{0k} = b_k,$$

由此可知 $\overline{b} = \overline{v_0}A$ 为矩阵 A 的行向量的线性组合.

最后, 假设矩阵 $A \in M_{I\times K}(D)$ 的行向量生成 ${}_D(D^K)$. 若 $\{f'_k|k \in K\}$ 为 V_D 的任意一组基, 则只需证明存在 $v_0 \in V$ 使得

$$v_0 \cdot f'_k = \begin{cases} 1, & 若\ k = 0 \\ 0, & 若\ k \neq 0, \end{cases}$$

设 $\overline{e_0}$ 为 $K \times K$ 单位矩阵的 0 行，则只需证明存在 $v_0 \in V$ 使得 $\overline{e_0} = < v_0 \cdot f'_k >$. 但是存在可逆矩阵 $P \in CFM_K(D)$ 使得

$$< f_k > = < f'_k > P,$$

由假设知矩阵 P 的 0 行为 A 的行向量的线性组合，即存在 $v_0 \in V$ 满足 $\overline{e_0}P = \overline{v_0}A$. 又由 (a) 的证明知 $< v_0 \cdot f_k > = \overline{v_0}A$, 从而有

$$\overline{e_0}P = \overline{v_0}A = < v_0 \cdot f_k > = < v_0 \cdot f'_k > P,$$

因为 P 可逆，所以 $\overline{e_0} = < v_0 \cdot f_k >$.　　**证毕.**

注记 1　对任意的双模 ${}_DV_D$, 我们不能利用 A 和 ψ 来定义 ρ, 这使得对于具体的例子我们只能先寻找 ρ 和 ψ, 然后再构造矩阵 A. 然而，一般地即使在有限维代数的情形矩阵 A 也不一定存在. 例如，令 $D = F$ 维交换域，设其自同态为 $\sigma : F \to F$. 考虑 $V = F^n$, 其右模结构按通常定义. 现定义 $V = F^n$ 的左模结构定义为 $f \cdot v = \sigma(f) \cdot v$. 则存在可逆矩阵 A 满足 $\rho(f)A = A\psi(f)$ 当且仅当 $\sigma^2 = 1_F$. 这个例子表明矩阵 A 的结构依赖于特定的双模结构，而不是依赖于维数.

注记 2　值得我们特别注意的是，我们论述的环均为带有单位元的元，不带单位元的环类内容更丰富. 比如，Artin 环在什么条件下为 NOether 环就是一个非常有意义的问题，复旦大学许永华教援对此做出了创造性的成果.

第 9 章　Frobenius 余代数和 Frobenius Hopf 代数

Hopf 代数是代数中最活跃的研究领域之一，它是人们在研究拓扑时被发现的. 40 年代初， H. Hopf 在研究拓扑群中的 Cochains 时构作了既有代数结构又有余代数结构的代数概念. 这种相同的代数概念在 20 世纪 50 年代也被 Cartier 和 Harlgern 等人研究过，当时称之为 Hyperalgebra. 类似的概念 A. Boreal 也研究过. 直到 1965 年 Milnor 与 Moore 在 Ann. of Math. 合作发表题为 "On the structure of Hopf algebras" 的文章后，上述的代数概念才被正式称为 Hopf 代数. Milnor 和 Moore 的这篇文章是开拓性的，给 Hopf 代数的结构研究奠定了基础. 自此以后， Hopf 代数引起了数学家们的广泛重视，取得了丰硕的成果. 在这个基础上， Kaplansky 在 1975 年出版了专著 "Bialgebra"，总结了当时研究的最新成果，提出了著名的现称之为 Kaplansky 的十个猜想，推动了 Hopf 代数的研究. 特别是近 20 年以来， Hopf 代数的研究又获得了重大进展，这主要是由于量子群 (它是数学物理中产生的 Hopf 代数) 的兴起， Kaplansky 某些猜想的解决以及 Hopf 代数作用理论的发展 (它统一了以前独立研究的群作用，李代数作用以及分次代数的作用理论),Hopf 代数从而形成了一门新的科学体系，它不仅限于代数结构理论的研究而且已发展成为与数学其他领域有密切关系的数学分支. 特别是在量子力学和数学物理方面， Hopf 代数已获得了重要应用，它已成为数学家和物理学家十分感兴趣的研究领域. 这些最新进展， Montgomery 和 Kasse 分别在书 "Hopf algebras and their actions on rings" 和书 "Quantum groups" 中作了非常系统的总结.

在本章，我们首先给出余代数和 Hopf 代数的一些基本概念，随后，我们系统地总结了 Frobenius 余代数和 Frobenius Hopf 代数的一些重要结果.

§9.1　余代数和余模的基本概念

在本章中 k 是一个给定的基域，所有的余代数、代数、向量空间和未加标的函子 $\otimes, Hom$ 等都是指在 k 上的， $\wedge, \Gamma, C$ 和 D 表示余代数. 用 **Mod** 表示 k - 模范畴.

定义 9.1.1　一个 **余代数** 是一个向量空间 C 和线性映射:

$$\Delta : C \to C \otimes C; \quad \varepsilon : C \to k,$$

使得 $(1\otimes\Delta)\Delta=(\Delta\otimes 1)\Delta$ 和 $(1\otimes\varepsilon)\Delta=(\varepsilon\otimes 1)=I$ 成立. 映射 Δ 和 ε 分别称为 C 的 **余乘法映射和余单位映射**.

设 C 和 D 是两个余代数. 一个线性映射 $f:C\to D$ 若满足条件

$$\Delta_D\circ f=(f\otimes f)\circ\Delta_C,\quad \varepsilon_D\circ f=\varepsilon_C,$$

则称 f 为 **余代数同态**.

定义 9.1.2　如果余代数 $(C,\Delta_C,\varepsilon_C)$ 的一个子空间 D 满足条件 $\Delta(D)\subset D\otimes D$, 并且 Δ_C,ε_C 在 D 上的限制 Δ_D,ε_D 是 D 的结构映射, 称 D 为 C 的 **子余代数**; 子空间 I 称为 **余理想**, 如果满足 $\Delta(I)\subseteq I\otimes C+C\otimes I$, $\varepsilon(I)=0$.

典范嵌入映射 $D\to C$ 是一个余代数同态.

定义 9.1.3　设 H 是一个向量空间, 假设存在线性映射:

$$\mu:H\otimes H\to H,\eta:k\to H,\Delta:H\to H\otimes H,\varepsilon:H\to k,$$

使得 (H,μ,η) 是一个代数, 而 (H,Δ,ε) 是一个余代数. 则下列条件等价:

(1) μ,η 都是余代数同态;

(2) Δ,ε 都是代数同态.

当一个 H 是一个具有上述四个映射的向量空间且满足上面两个等价条件之一时, 则称 H 是一个 **双代数**. 设 H,K 是两个双代数, 若映射 $f:H\to K$ 既是一个代数同态又是一个余代数同态, 则称 f 是一个 **双代数同态**.

定义 9.1.4　设 H 是一个双代数, 令 $R=Mod(H^C,H^A)$, 我们在 R 上定义一个新运算

$$f*g=\mu\circ(f\otimes g)\circ\Delta,$$

则 R 作成一个代数. 当 H 的单位映射 I 在 R 的这种新运算下是可逆的, 称 I 的逆是 H 的 **对极 (antipode) 映射**, 表示为 S_H. 有一个对极映射 S 的双代数 H 称为一个 **Hopf 代数**.

设 H 和 K 是两个 Hopf 代数, S_H,S_K 分别是 H 和 K 的对极映射. 若一个双代数同态 $f:H\to K$ 满足条件 $S_K\circ f=f\circ S_H$, 则称 f 是一个 **Hopf 代数同态**.

定义 9.1.5　一个右 C- **余模** 是一个对 (X,ρ), 其中 X 是一个向量空间, $\rho:X\to X\otimes C$ 是一个线性映射使得

$$(1\otimes\rho)\rho=(\Delta\otimes 1)\rho.$$

$$(1\otimes\varepsilon)\rho=I.$$

对右余模 M,N, 如果 (C- 余线性) 映射 $f:M\to N$ 满足条件:

$$\rho_N f=(f\otimes 1)\rho_M,$$

则称 f 为一个 **余模映射**. 用 $\text{Com-}_C(M,N)$ 表示所有 M 到 N 的所有 C- 余线性映射所作成的集合. 用 $\mathcal{M}^C({}^C\mathcal{M})$ 表示右 (左) C- 余模范畴. 对一个右 C- 余模 X, 如果函子 $\text{Com-}_C(\text{-},X)$,($\text{Com-}_C(X,\text{-})$) 是正合函子, 则称 X 是内射 (投射) 余模, 用 $\mathcal{M}^C({}^C\mathcal{M})$ 表示右 (左)C- 余模范畴.

§9.2 Frobenius 余代数

设 C 是一个余乘映射为 Δ , 余单位映射为 ε 的一个余代数. 若定义 C^* 对 C 的作用为: $c^* \rightharpoonup c = (1\otimes c^*)\Delta(c) = \sum c_{(1)} < c^*, c_{(2)}$ 和 $c \leftharpoonup c^* = (c^*\otimes 1)\Delta(c) = \sum < c^*, c_{(1)} > c_{(2)}$. 其中 $c^* \in C^*, c \in C$. 于是 C 可以看作是一个 C^* - 双模. 在这个伴随作用下, C^* 是一个 C^* - 双模. 因为对任意 c^*, $d^* \in C^*, c^*d^* \in C^*$ 使得 $c^*d^*(c) = (c^*\otimes d^*)\Delta(c) = d^*(c \leftharpoonup c^*) = c^*(d^* \rightharpoonup c)$. 对一个双线性型:

$$b\colon C\times C \to k,$$

b 能够导出两个 k- 映射:

$$b_r, b_l\colon C \to C^*,$$

使得

$$b_r(d)(c) = b(c,d) = b_l(c,d).$$

下面的引理是显然的.

引理 9.2.1 设 C 是一个余代数, b_r, b_l 是上面定义的映射, 则下列条件等价:

(1) $\sum c_{(1)} b(c_{(2)}, d) = \sum b(c, d_{(1)}) d_{(2)}$, 对任意 $c, d\in C$;

(2) $b(c \leftharpoonup c^*, d) = b(c, c^* \rightharpoonup d)$, 对任意 $c,d \in C$, $c^* \in C^*$;

(3) b_r 是左 C^*- 同态;

(4) b_l 是右 C^*- 同态.

注记 (1) 映射 b_r, b_l 和 b 有关系:

(a) $b_r(C) \subseteq ({}_{C^*}C^*)_r$, $b_l(C) \subseteq (C^*_{C^*})_r$.

(b) $\text{Ker} b_r = (I_m b_l)^\perp = \{c_2 \in C \mid b(C, c_2)\} = 0$.

(c) $\text{Ker} b_l = (I_m b_r)^\perp = \{c_1 \in C \mid b(c_1, C)\} = 0$.

(2) 事实上, 由于 C 是双余模, 我们可得上面引理的证明.

定义 9.2.1 一个双线性形 b 称为 C- 平衡的, 如果上面等价条件中有一个成立. 余代数 C 称为 **Frobenius 余代数**, 如果在 C 上存在一个非退化和 C- 平衡的 (C-balenced) 双线性型.

注记　有的文献 (如见文献 [144]) 称 C 为左 (右)Frobenius, 是指存在一个从 C 到 C^* 的单的左 (右) C^*- 模同态. 由上可知, 左 Frobenius 余代数与右 Frobenius 余代数是等价的. 故定义 9.2.1 就没有区分左和右了.

例 9.2.1　任一个余半单余代数都是 Frobenius 余代数.

证明　事实上, 如果 $C = \bigoplus_{i\in I} C_i$, 其中 C_i 都是 C 的单子余代数, 由于 $A_i = C_i{}^*$ 是单代数, 于是有左 A_i- 模同构, $A_i \cong A_i{}^*$. 从而有左 $C_i{}^*$- 模同构: $C_i \cong C_i{}^*$. 于是作为左 C^*- 模, 也有 $C_i \cong C_i{}^*$, 从而有

$$C = \bigoplus_{i\in I} C_i \cong \bigoplus_{i\in I} C_i{}^* \to \pi_{i\in I} C_i{}^* = C^*. \qquad \text{证毕.}$$

引理 9.2.2　设 M 是一个有限维右 C- 余模, 则 M 是内射 (投射) 的左 C^*- 模当且仅当 M 是内射 (投射) 右 C- 模.

证明　只须证明 “ $\Leftarrow$ ” 即可. 假设 M 是内射右 C- 模, 则映射:

$$o \to M \xrightarrow{\rho} (M)\otimes C \cong C\oplus C\oplus\cdots\oplus C,$$

作为右 C- 模是分裂的, 且作为左 C^*- 模也是分裂的. 取对偶得映射得到:

$$C^*\oplus\cdots\oplus C^* \to M^* \to O,$$

该正合列作为右 C^*- 模是分裂的, 从而 M^* 是投射右 C^*- 模. 故 $M = M^{**}$ 是内射左 C^*- 模. 下证: 若 M 是投射右 C- 模, 则 M 是投射左 C^*- 模. 由于 M^* 是内射左 C- 余模. 由上面知 M^* 是内射右 C^*- 模, 故 $M = M^{**}$ 是投射右 C^*- 模.
证毕.

定理 9.2.1　设 C 是一个左 Frobenius 余代数, 则

(1) 每个有限维右 C- 余模的一个内射包络是有限维的;

(2) 每个内射右 C- 模是 C- 投射. 特别地, C 是投射左 C^*- 模且 C^* 是右自内射的;

(3) 左 C- 余模范畴有足够多的投射余模.

证明　(1) 设 M 是一个有限维右 C- 余模, $S(M) = \bigoplus_{i=1}^n S_i$ 是 M 的基坐. 易证: $E(M) \cong \bigoplus_{i=1}^n E(S_i)$. 要证 (1) 只须证明对 M 的任意单右 C- 子余模 S, $E(S)$ 是有限维的即可.

不妨假设 S 是 C 的极小右余理想且 $E(S) \subseteq C$. 设 $0 \neq x \in S$. 则 $S = C^*\rightharpoonup x$. 由于 C 是左 Frobenius 余代数, 于是存在 $c\in C$ 使得 $b(c,x)\neq 0$. 可以证明 $(c\leftharpoonup C^*)^\perp \bigcap S = 0$. 假设存在 $0\neq y\in S$ 使得 $y\in (c^*\leftharpoonup)^\perp$. 由于 $S = C^*\rightharpoonup x = C^*\rightharpoonup y$, 存在 $c^*\in C^*$ 使得 $c^*\rightharpoonup y = x$. 则

$$b(c\leftharpoonup c^*, y) = b(c, c^*\rightharpoonup y) = b(c,x)\neq 0,$$

但是 $y \in (c\leftharpoondown C^*)^{\perp}$, 从而有 $b(c\leftharpoondown c^*, y) = 0$, 矛盾.

由于 $c\leftharpoondown C^*$ 是一个左余理想, 则 $(c\leftharpoondown C^*)^{\perp}$ 是右余理想. 从而有 $(c\leftharpoondown C^*)\bigcap E(S) = 0$. 一般地有, 如果 X 是 C 的一个有限维子空间, 由于 $X^{\perp}$ 是映射 $C \to X^*$ 的核, 其定义为 $c \to \theta(c)|X$ 所以 $X^{\perp}$ 是余有限维的. 故 $(c\leftharpoondown C^*)$ 是余有限维的, 从而 $E(S)$ 是有限维的, (1) 得证.

(2) 设 V 是内射右 C- 余模, $S(V) = \bigoplus_{i\in I} S_i$ 是 V 的 Socle, 则 $V \cong \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$. 由于 $E(S_i)$ 是有限维的. 由引理 9.2.2 知 $E(S_i)$ 是内射左 C^*- 模. 由嵌入: $E(S_i) \subset C \xrightarrow{\theta} C^*$ 知作为左 C^*- 模, $E(S_i)$ 是 C^* 的直和项, 故 $E(S_i)$ 是投射左 C^* - 模. 从而 V 也是投射左 C^*- 模. 故 V 是投射 C- 余模. 特别地, C 是投射左 C^*- 模, C^* 是右自内射代数.

(3) 我们需要证明对每个左 C - 余模 N, 存在一个满同态 $P \to N \to O$, 其中 P 是投射左 C- 余模. 不失一般性, 不妨设 N 是有限维的. 于是对有限维右 C- 余模单同态 $O \to N^* \to E(N^*)$, 取对偶得左 C - 余模满同态: $E(N^*)^* \to N \to O$, 其中 $E(N^*)^*$ 是投射的. **证毕.**

引理 9.2.3 设 H 是一个 Hopf 代数. 如果 I 是一个非零右理想且是一个右余理想, 则 $I = H$.

证明 如果 $q(1) = 0$, 由于 I 是右余理想, 对任意 $h \in I$ 有 $\Sigma q(h_{(1)}h_{(2)}) = 0$, 故 $\Sigma(1) \neq 0$. 于是存在 h 使得 $\Sigma(h) = 1$. 由于 $1 = \Sigma(h) = \Sigma h_{(1)}S(h_{(2)})$ 且 $IH \subseteq I$, 于是 $1 \in I$. **证毕.**

定义 9.2.2 设 C 是一个余代数. $x \in C^*$ 称为左 integral(或称 **整元素**), 如果 x 是一个从 C 到 k 的左 C- 余模映射, 即 $\Sigma c_{(1)} < x, c_{(2)} >=< x, c >=< x, c > u(1)$. 这等价于条件 $c^*x =< c^*, u(1) > x$, 对任意的 c^*.

定理 9.2.2 设 H 是一个 Hopf 代数, 则下列论述等价:

(1) H 有一个非零左整元素;

(2) H 是左余 - Frobenius Hopf 代数;

(3) H 有一个非零右整元素;

(4) H 是右余 - Frobenius Hopf 代数;

(5) 单右余模的内射包络是有限维的;

(6) 单左余模的内射包络是有限维的.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 设 x 是一个非零左整. 定义一个双线性形 $b: H \times H \to k, b(c, d) =< x, cS(d) >$, 对任意 $c, d \in H$. 则

$$\begin{aligned}\sum b(c, d_{(1)})d_{(2)} &= \sum < x, cS(d_{(1)}) > d_{(2)} \\ &= \sum c_{(1)}S(d_{(2)}) < x, c_{(2)}S(d_{(1)}) > d_{(3)} \\ &= \sum c_{(1)} \in (d_{(2)}) < x, c_{(2)}S(d_{(1)}) >\end{aligned}$$

$$= \sum c_{(1)} < x, c_{(2)}S(d) >$$
$$= \sum c_{(1)} b(c_{(2)}, d)$$

这就证明了 $b: H \times H \to k$ 是 C- 平衡的.

下面我们将证明 $H^{\perp} = \{d \in H | b(c,d) = 0,\ \forall c \in H\} = 0$.

令 $d \in H^{\perp}, h \in H$, 对 $\forall c \in H$, 故 $dh \in H^{\perp}$. 从而 $H^{\perp}$ 是 H 的一个右理想. 由于 $x \neq 0, H^{\perp}$ 是一个非平凡右理想. $H^{\perp}$ 也是一个右余理想, 由引理 9.2.3 知 $H^{\perp} = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3). 在定理 9.2.1 的证明中已证如果 H 是 Frobenius 余代数, 则 H 包含一个无限维非平凡右理想. 故由 (2.14)(见文献 [138]) 知 H 有一个非零右整元素.

同理可证 (3) $\Rightarrow$ (4) 和 (4) $\Rightarrow$ (1).

由 (见文献 [135]) 定理 1 知 (5) $\Rightarrow$ (3);(5) $\Rightarrow$ (1) 成立.　　**证毕.**

对每个 $M \in \mathcal{M}^C$, 我们定义函子 $\mathrm{Ext}_c^n(M,-)$ 为函子 $\mathrm{Hom}_c(M,-)$ 的第 n 个导出函子. 即取右 C- 余模 N 的一个内射分解 X

$$0 \to N \to X_0 \to X_1 \to X_2 \to \cdots,$$

则 $\mathrm{Ext}_c^n(M,N)$ 定义为复形 $\mathrm{Ext}_c^n(M,X)$ 的 n- 阶上同调群. 如果 N 是内射的, 易见对所有的余模 $M(n > 1)$ 有 $\mathrm{Ext}_c^n(M,N) = 0$. 对内射性的度量, 我们可以考虑内射维数 $Id_C(N).Id_C(N)$ 定义为最大的正整数 n 使得存在 M 满足 $\mathrm{Ext}_c^n(M,N) \neq 0$. 如果这样的 n 不存在, 则 $Id_C(N) = \infty$. 对余代数 C, 右总体维体 $rgd(C) = \sup\{Id_C(N) | N \in \mathcal{M}^C\}$, 类似地, 可以定义 C 的左总体维数. 下面我们借助于同调的方法来研究 Frobenius 代数.

定理 9.2.3　设 C 是一个右 Frobenius 余代数, 则 $rgl.dim = 0$ 或 ∞.

证明　设 $N \in \mathcal{M}^C$ 且 $\mathrm{inj.dim}(N) = t < \infty$, 取 $M \in \mathcal{M}^C$ 使得 $Ext_c^t(M,N) \neq 0$. 由于 $\mathcal{M}^C$ 有足够多的投射模, 于是有正合列:

$$0 \to K \to P \to M \to 0,$$

其中 P 是投射模, 于是得正合列:

$0 \to Ext_C^t(P,N) \to Ext_C^t(M,N) \to Ext_C^t(K,N) = 0$, 矛盾.　　**证毕.**

下面, 我们得到 Frobenius 余代数的一个刻画.

定理 9.2.4　余代数 C 是 Frobenius 的当且仅当存在一个双线性形 $b: C \times C \to k$ 使得对任意 $c \in C$ 和任意单右 C- 余模 S 有 $(c \leftharpoonup c^*)^{\perp} \bigcap S = 0$.

证明　由定理 9.2.1 的证明知, 只须证充分性即可. 设 $c \in C, x \in C$ 是两个非零元. 下证 $b(c,x) \neq 0$. 由于 $(c \leftharpoonup c^*)^{\perp}$ 是 C 的一个右余理想且是映射 $C \to \mathrm{Hom}(c \leftharpoonup, k)$ (对应法则为 $c \to \theta(c)|_{\leftharpoonup}$) 的核. 对任意 $x \in C$, $V = C^*_{\leftharpoonup} x$ 是一个有限维右 C- 余模, 故 $E(V) = \bigoplus_{i=1}^n S_i$. 由假设知 $(c \leftharpoonup c^*)^{\perp} \bigcap E(V) = (c \leftharpoonup c^*) \bigcap V = 0$, 故 $b(c,x) \neq 0$. **证毕.**

§9.3 余交换 Frobenius Hopf 代数

有非零整元素的 Hopf 代数在文献 [135] 和文献 [136] 中得到广泛的研究. 在这两篇文章中, Sullivan 讨论了在交换 Hopf 代数中, H 中整元素的存在性与 H 的子 Hopf 代数和 H 的商 Hopf 代数的整元素的存在性有关. 另一方面, 我们知道 Hopf 代数 H 是 Frobenius Hopf 代数当且仅当 H 有非零整元素. 在本节, 我们考虑余交换 Frobenius Hopf 代数的扩张问题 (extension problems).

引理 9.3.1 设 H 是 k 上的一个 Hopf 代数, 则 H 是 Frobenius 的, 等价于 $H \otimes_k \bar{k}$ 是 Frobenius 的, $\bar{k}$ 是 k 的代数闭域.

证明 直接可验证之. **证毕.**

我们知道, 一个余代数 C 称为 **不可约的**(irreducidle) 如果其任意两个非零子余代数的交非零.

引理 9.3.2 设 H 是一个不可约的 Hopf 代数, 则 H 是 Frobenius 的当且仅当 H 是有限维的.

证明 H 的每个非零右余理想都包含 H 的惟一的 grouplike 元素 1, 由于 H 是 Frobenius 的, 有 $\bigcap\{R|R$ 是 H 的余有限右余理想 $\}\subset (\mathrm{Im}b_l)^{\perp}=0$, 从而有 (0) 是余有限的, 即 H 是有限维的. 若 H 是有限维的, 则由文献 [90] 知 H 有一个左整元素. 由定理 9.2.2 知 H 是 Frobenius. **证毕.**

设 K 是 H 的一个子-Hopf 代数, K 是正规的, 如果 $\sum h_{(1)}kS(h_{(2)})\in K, (\forall k\in K, h\in H)$. 一个 Hopf 代数序列: $0\to K\xrightarrow{i}H\xrightarrow{\pi}B\to O$ 称为 **正合序列**. 如果 K 是正规的, π 是满同态且 $\ker\pi=HK^+H$, 其中 K^+ 是 K 的增广理想. 如果 K 是正规的, 则 $HK^+H=HK^+=K^+H$.

定理 9.3.1 设 $0\to K\xrightarrow{i}H\xrightarrow{\pi}B\to O$ 是一个余交换 Hopf 代数的正合列, 则 H 作为余代数是 Frobenius 的当且仅当 K、B 作为余代数都是 Frobenius 的.

证明 由引理 9.3.1, 不妨假设 k 是代数闭的. 由 Konstant 的结构定理知:

$$K=K_1\otimes kG_1,$$

$$H=H_1\otimes kG_2,$$

$$B=B_1\otimes kG_3,$$

其中 K_1, H_1, B_1 都是点化不可约 Hopf 代数. kG_1, kG_2, kG_3 都是 k 上的群代数.

故有下列正合列:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & K_1 & \xrightarrow{i_1} & K & \rightarrow & kG_1 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & H_1 & \xrightarrow{i_2} & H & \rightarrow & kG_2 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & B_1 & \xrightarrow{i_3} & B & \rightarrow & kG_3 & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

如果 H 是 Frobenius 的，由文献 [135] 知 H 的子 -Hopf 代数 H_1 也是 Frobenius 的. 由引理 9.3.2 知 K_1 和 B_1 都是 Frobenius 的. 这表明 K 和 B 都是 Frobenius 余代数的张量积，因而都是 Frobenius 的. 反过来，假设 K 和 B 都是 Frobenius, 则 K_1 和 B_1 都是有限维的. 设 $h_1, h_2 \cdots, h_t \in H_1$ 是 B_1 的一个基的原象，设 C_{h_i} 是由 h_i 生成的子余代数，则 $H_1 = C_{h_i} + C_{h_2} + \cdots + C_{h_i} + H_1 K_1^+$. 运用 Frobenius 映射 V, 得 $V^n(H_1) = V^n(C_{h_1}) + \cdots + V^n(C_{h_i}) + V^n(H_1)V^n(K_1^+)$($\forall$ 整数 n) 由于 C_{h_i} 和 K_1^+ 都是有限维的，有 H_1 有限维的. 故可以找到 H_1 的一个 Sweeder 基 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$, 使得它包含 K_1 的一个 Sweedler 基 $\{x_\alpha\}_{\alpha\in J}$, 由于 $H_1 \cong HK_1^+ \bigoplus B_1$ 且 B_1 是有限维的，由 Newman 定理知 J 是有限的且 H_1 是有限维的. 故 $H = H_1 \otimes kG_2$ 是 Frobenius Hof 代数.　**证毕**.

§9.4　Frobenius 代数与 Smash 积

设 H 是域 k 上的一个余乘法和余单位分别为 Δ 和 ε 的有限维 Hopf 代数. 我们称 A 是一个左 H- **模代数**, 如果 A 是一个左 H- 模使得

(1) $h(ab) = \sum\limits_{(h)}(h_1 a)(h_2 b)$,

(2) $\mathrm{h} \cdot {}^1\mathrm{A} = \varepsilon(h)^1\mathrm{A}$,

对 $\forall a, b \in A, \forall h \in H$ 成立. 其中 $\Delta(h) = \sum\limits_{(1)} h_1 \otimes h_2$.

注记　当 H 是有限维时，只须 A 满足条件 (1) 即可.

如果 A 是一个 H- 模代数. 我们可以定义 **Smash 积**$A\#H$. $A\#H$ 是 k- 向量空间 $A \otimes H$ 且有乘法 $(a\#h)(b\#l) = \sum\limits_{(h)} a(h_1 b)\#h_2 l$, $\forall a, b \in A$, h, $l \in H$. 特别地，作为子代数 $A\#1$ 和 $1\#H$,A 和 H 可以嵌入 $A\#H$ 中. 如果 $B \subseteq A$, 用 BH 表示 $A\#H$ 的由所有形式为 $(b\#1)(1\#h)$ 的元张成的 k- 子空间 $(h \in H, b \in B)$. 类似地，

HB 表示所有形式为 $(1\#h)(b\#1)$ 的元张成的 k- 子空间. 而且, $AH = HA = A\#H$, 如果设 $\{h_i\}$ 是 H 的 k- 基, 则 $\{l\#h_i\}$ 是自由左和右 A- 模 $A\#H$ 的基. 由于 H 是有限维时, H 的对偶 H^* 也是 Hopf 代数且 $A\#H$ 是一个 H^*- 模代数. 故又可作 Smash 积 $(A\#H)\#H^*$.

下面, 我们给出 Blattner-Montgomery 对偶定理 (见文献 [22]).

引理 9.4.1 如果 A 是一个 H- 模代数, 其中 $dim_kH = n$, 则 $(A\#H)\#H^* \cong M_n(A)$. ($M_n(A)$ 表示 A 上的 $n \times n$ 阶矩阵).

引理 9.4.2 如果 L 和 R 分别是 A 的左理想和右理想, 则 HL 和 RH 分别是 $A\#H$ 的左和右理想, 而且 $r_{A\#H}(HL) = r_A(L)H, l_{A\#H}(RH) = Hl_A(R)$.

证明 先证 HL 的情形, 由于 $A\#H = HA$, 有 $(A\#H)(HL) \subseteq HAL \subseteq HL$, 于是 HL 是 $A\#H$ 的一个左理想. 显然有 $r_A(L)H \subseteq r_{A\#H}H(L) = r_{A\#H}(HL)$. 如果 $w \in r_{A\#H}(HL)$, 则由于 $A\#H$ 是一个自由左 A- 模, w 可以表示为 $w = \Sigma(a_i\#l)(l\#h_i)$ (其中 h_i 属于 H 的一个 k- 基). 从而有 $0 = Lw = \Sigma(La_i)(l\#h_i)$ 且 $\forall i$ 有 $La_i = 0$, 故 $a_i \in r_A(L)$. 从而结论得证.

同理可证在 RH 情形, 结论也成立. **证毕.**

定理 9.4.1 如果 A 是一个 H- 模代数, 其中 H 是一个有限维 Hopf 代数, 则 Smash 积 $A\#H$ 是 Frobenius 当且仅当 A 是 Frobenius.

证明 显然有, $A\#H$ 是有限维当且仅当 A 是有限维, 设 L 是 A 的一个左理想, 由引理 9.4.2 知, HL 是 $A\#H$ 的一个左理想且 $r_{A\#H}(HL) = r_A(L)H$. 如果 $A\#H$ 是 Frobenius, 则有 $(dim_kL + dim_kr_A(L))(dim_kH = dimHL + dim_kr_A(L)H) = dim_kHL + dim_kr_{A\#H}(HL) = dim_kA\#H = (dim_kA)(dim_kH)$. 于是 $dim_kL + dim_kr_A(L) = dim_kA$. 同理可证如果 R 是 A 的右理想, 则 $dim_kR + dim_kl_A(R) = dim_kA$. 故 A 是 Frobenius .

另一方面, 设 A 是 Frobenius, 则 $M_n(A)$(A 上的 $n \times n$ 阶矩阵) 也是 Frobenius. 由引理 9.4.1 知 $M_n(A) \cong (A\#H)\#H^*$, 故 $(A\#H)\#H^*$ 是 Frobenius. 通过运算 $f \cdot (a\#h) = a\#\ (f_h)A\# = \Sigma < f, h_{(2)} > a\#h_{(1)}$, 我们可以把 H^* 看作 Hopf 代数, 而把 $A\#H$ 看成 H^*- 模代数由上面的结论知, $A\#H$ 是 Frobenius. **证毕.**

第 10 章　半完全余代数

在代数或环上的模范畴中都存在足够多的投射模，因此，我们就有了完全代数、半完全代数或完全环、半完全环的概念. 但对于一般的余代数，其余模范畴存在足够多的投射模就不是一个自然事实，因为存在那样的余代数其余模范畴就几乎不存在投射模. 在这个背景下，I. P.Lin 在文献 [89] 中提出了半完全余代数的概念，这是一类很重要的余代数，它是 quasi-Frobenius 余代数的自然推广. 这类余代数的一个重要特征是其右 (左) 余模范畴有足够多的投射余模. 在本章，我们系统地总结了半完全余代数的主要结果. 另外，作者还在文献 [153] 中建立了半完全余代数上的 Tilting 余模的概念及一系列结果.

§10.1　有理模的基本性质

设 C 是一个余代数，其对偶代数为 C^*, 对左 C^*- 模 M, 有典范单射:

$$M \otimes C \longrightarrow M \otimes C^{**} \xrightarrow{f} Hom(C^*, M),$$

其中 f 定义为 $f_{m\otimes c^{**}}(c^*) =< c^{**}, C^* > m$, 左 C^*- 模 M 称为 **有理的**, 如果存在典范单射: $\rho_M : M \longrightarrow Hom(C^*, M)$, 使得 $\forall m \in M, c^* \in C^*, \rho_M(M) \subseteq M \otimes C \rho_M$ 的定义为 $\rho_M(m)(c^*) = \psi(c^* \otimes m)(\forall m \in M, c^* \in C^*), \rho_M(M) \subseteq M \otimes C$.

每个左 C^*- 模 M 都包含一个惟一极大有理子模，我们用 $\mathrm{Rat}(M)$ 或 M_r 表示之. 对 $m \in M$ 下列条件等价:

(1) $m \in \mathrm{Rat}(M)$;

(2) $A_{nn}(m)$ 是 C^* 的一个闭余有限左理想;

(3) $A_{nn}(m)$ 包含 C^* 的一个闭余有限双边理想.

特别地， $\mathrm{Rat}(C^*) = C_r^*$ 为 C^* 的所有有限维左理想的和.　$C_r^* = C^*$ 当且仅当 C 是有限维的，而且，我们可以定义函子 $\mathrm{Rat}:_{C^*} M \to_{C^*} M$, 函子 Rat 把映射 $f : M \to N$ 映成 f 的限制映射 $f_{Rat(M)}$. 从 Hopf 代数的标准教材知 **有理函子** 具有下述性质:

(A) 如果 N 是 M 的子模，则

　(1) $N_r = M_r \bigcap N$;

　(2) $0 \longrightarrow (N/N_r)_r \longrightarrow (M/M_r)_r$ 是正合列.

(B) $C_r^{**} = C$;

(C) 有理模的同态象是有理模.

命题 10.1.1 在模范畴 M_{C^*} 中，下列论述等价：

(1)$(M/M_r)_r = 0, (\forall M \in_{C^*} M)$;

(2) 对 C^*- 模短正合列 $0 \to L \to M \xrightarrow{\pi} N \to 0$ ，如果 $L, N \in^C \mathcal{M}$, 则 $M \in^C \mathcal{M}$.

证明 (1)⇒(2). π 导出一个单同态 $\pi: M/M_r \to N/\pi(M_r)$. 因为如果 $\pi(m + M_r) = 0$, 则 $\pi(m) \in \pi(M_r)$. 故 $m \in M_r$ 从而 $m + M_r = \bar{0}$. 由于 $L \in^C \mathcal{M}$, $N/\pi(M_r)$ 是有理模，于是子模 M/M_r 也是有理模. 故 $(M/M_r) = (M/M_r)_r = 0$, 即证明了 $M = M_r \in^C \mathcal{M}$.

(2)⇒(1). 如果 $M/M_r \neq 0$, 设 T 是 M/M_r 在 M 中的原象，于是得正合列：

$$0 \to M_r \to T \to (M/M_r)_r \to 0,$$

由 (2) 知 T 是有理模且真包含 M_r, 与 M_r 是 M 的惟一极大有理子模矛盾. **证毕**.

§10.2 半完全余代数的特征

设 V 是域 k 上的一个向量空间，回忆一下 V^* 的子空间 I 在 V^* 中稠密是指 $I^{\perp} = \{c \in V | < c, I >= 0\} = 0$. 从而如果 $I \subseteq J$ 是 C^* 的两个子空间且 I 在 V^* 中稠密，则 J 必然在 V^* 中稠密.

引理 10.2.1 如果 C 在 M^C 中投射，则 $(C^*_{C^*})_r$ 在 C^* 中稠密.

证明 设 $\{M_i, i \in I\}$ 是 C 的所有有限维子余模的集合，由于 C 是局部有限，故存在一个满同态：

$$F: \bigoplus_{i \in I} M_i \to C,$$

由于 C 投射，从而存在 $T \in \mathcal{M}^C$ 使得 $\bigoplus_{i \in I} M_i \cong C \oplus T$, 在两边取有理对偶得

$$(\bigoplus_{i \in I} M_i)^*_r \cong (C^*_{C^*})_r \oplus T^*_r.$$

由于每个 M_i 都是有限维，知 $(M_r)^*_r = M^*_i$, 故 $\bigoplus_{i \in I} M^*_i$ 是 $(\bigoplus_{i \in I} M_i)^* = \prod_{i \in I} M^*_i$ 的一个有理子模，从而有 $\bigoplus_{i \in I} M^*_i \subseteq (\bigoplus_{i \in I} M_i)^*_r$, 又因为 $\bigoplus_{i \in I} M^*_i$ 在 $\prod_{i \in I} M^*_i$ 中稠密，从而有 $(\bigoplus_{i \in I} M_i)^*_r$ 是 $(\bigoplus_{i \in I} M_i)^*$ 的稠密子空间. 故其直和项 $(C^*_{C^*})_r$ 在 C^* 中稠密. **证毕**.

引理 10.2.2 设 $M^* \xrightarrow{f^*} N^*$ 是一个余模正合列 $0 \to N \xrightarrow{f} M$ 取对偶而得. 如果 M^*_r 在 M^* 中稠密，则 N^*_r 也在 N^* 中稠密.

注记 该引理由下列两个事实可知：

(1) $f^*(m^*_r) \subseteq N^*_r$;

(2) 如果 I 是 M^* 的一个稠密子空间，则 $f^*(1)$ 在 N^* 中稠密.

引理 10.2.3 设 C 是一个余代数，则 $(C^*_{C^*})_r$ 在 $C^*_{C^*}$ 中稠密当且仅当对每个余模 $M \in \mathcal{M}^C$, M 的有理对偶 M^*_r 在 M^* 中稠密.

证明 只须证明必要性即可. 设 M 在余模映射 ρ_M 下可嵌入 C 的一个直和中, 即

$$0 \to M \xrightarrow{\rho_M} M \otimes C = \oplus C,$$

取对偶得:

$$(\oplus C)^* \xrightarrow{\rho_M^*} M^* \to 0.$$

因为 $\bigoplus C^*$ 在 $\pi C^* = (\bigoplus C)^*$ 中稠密, 故 $(\bigoplus C)_r^* (\supseteq \bigoplus C_r^*)$ 在 $(\bigoplus C)^*$ 中稠密. 由引理 10.2.2 知 M_r^* 在 M^* 中稠密. **证毕.**

将 C 分解成单右 C- 余模 S_i 的内射包络的直和, $C = \oplus_{i \in I} E(S_i)$. 则有以下的引理.

引理 10.2.4 $(C_{C^*}^*)_r$ 在 C^* 中稠密当且仅当每个 $E(S_i)_r^*$ 在 $E(S_i)^*$ 中稠密.

证明 由引理 10.2.3 知必要性得证. 下证充分性. 有

$$C^* = \prod E(S_i)^* \supseteq \oplus E(S_i)^* \supset \oplus E(S_i)_r^*.$$

从而有 $C_r^* \supseteq \oplus E(S_i)_r^*$, 由于 $\oplus E(S_i)^*$ 在 $\pi E(S_i)^*$ 中稠密. 从而有 $\oplus E(S_i)_r^*$ 在 C^* 中稠密. 故 C_r^* 在 C^* 中稠密. **证毕.**

引理 10.2.5 如果 P 是 $\mathcal{M}^C$ 中的一个投射余模, 则 P_r^* 在 ${}^C\mathcal{M}$ 中内射.

证明 首先假设 M,N 都是有限维左余模且有下列行正合图:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \to & N & \xrightarrow{h} & M \\ & & \downarrow f & & \\ & & P_r^* & & \end{array}$$

设 $i : P_r^* \to P^*$ 是包含映射, 从而有下图:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ & \downarrow & \\ & P^{**} & \\ & \downarrow (if)^* & \\ M^* \xrightarrow{h^*} & N^* & \longrightarrow 0, \end{array}$$

其中 $M^*,N^* \in \mathcal{M}^C$. 由于 P 是投射的, 存在一个同态 $g : P \to M^*$ 使得 $h^*g = (if)^*$. 再取对偶得:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M \\ & & \downarrow f & \swarrow g^* & \\ & & P_r^* & & \\ & & \downarrow & & \\ & & P^* & & \end{array}$$

因为 M 是有理的，有 $\mathrm{Img}^* \subseteq P_r^*$，故有下列交换图：

$$\begin{array}{c} 0 \to N \to M \\ \downarrow f \swarrow g^* \\ P_r^* \end{array}$$

一般地，如果有图：

$$\begin{array}{c} 0 \to N \to M \\ \downarrow f \swarrow \\ P_r^* \end{array}$$

其中 $N, M \in {}_{C^*}M$，设 $J = \{(N_i, f_i)\,|N \subseteq N_i$ 是 M 的子模， $f_i : N_i \to P_r^*$ 且 $f_i|N = f\}$．显然 J 是一个偏序集，故存在一个极大元 (N_1, f_1). 如果 $N_1 \neq M$，取 $m \in M - N_1$．考虑下列图表：

$$\begin{array}{c} 0 \to N_1 \bigcap mC^* \xrightarrow{i} mC^* \\ \downarrow F_1 \\ P_r^* \end{array}$$

其中 F_1 是 f_1 的限制映射．由于 mC^* 是有限维有理模，存在映射 $g : mC^* \to P_r^*$ 使得 $gi = F_1$. 定义同态

$$f_2 : N_1 + mC^* \to P_r^* \text{ 为 } f_2(n + mr) = f_1(n) + g(mr), \quad n \in N_1, \ r \in C^*.$$

则 $(N_1 + mC*, f_2)$ 大于 (N_1, f_1) 与 (N_1, f_1) 的极大性，矛盾．故 $N_1 = M$. 即证明了 P_r^* 是内射的． **证毕**.

下面这个引理在余代数理论中是很著名的．

引理 10.2.6 设 C_0 是右 C 的余根，则 $C_0^{\perp}$ 是 C^* 的 Jacobson 根 (见文献 [70]).

引理 10.2.7 设 M 是右 C- 余模， C_0 是 C 的余根， J 是 C^* 的 Jacobson 根．则

(1)M/JM 是右 C_0- 余模;

(2)M/JM 是单 C_0- 余模的直和.

证明 显然 M/JM 是 C^*/J- 模．由正合列：

$$0 \to C_0 \to C \to C/C_0 \to 0 \text{ 有 } C_0^{\perp} = (C/C_0)^* = C^*/C_0^*.$$

故由引理 10.1.6 知 $C_0^{\perp} = J$，从而有 $C_0^* \cong C^*/C_0^{\perp}$，因此 M/JM 是 C_0^*- 模．对 $\forall (m + JM) \in M/JM, m + JM$ 的零化子包含 m 的零化子和 $C_0^{\perp}$，故 $m + JM \in (M/JM)_r$. 即证明了 M/JM 是有理 C_0- 余模． **证毕**.

引理 10.2.8　设 I,M 是有限维左 C- 余模，则

(1) I 在 ${}^C\mathcal{M}$ 中内射当且仅当 I^* 在 ${}^C\mathcal{M}$ 中投射；

(2) I 是 M 的内射包络当且仅当 I^* 是 M^* 的投射盖.

证明　利用余模的局部有限性即可证之.　　**证毕.**

定理 10.2.1　下列关于余代数 C 的论述等价：

(1) 右 C- 余模范畴 $\mathcal{M}^C$ 有足够多的投射模；

(2) $({}_{C^*}C^*)_r$ 在 C^* 中稠密；

(3) 每个单 C- 余模的内射包络是有限维的；

(4) 每个有限维右 C- 余模都有投射盖.

证明　(1)⇒(2). 像前面一样，设 $C=\oplus_{i\in I}E(S_i)$, S_i 是 C 的所有单子 - 余模. 由于 S_i 是有限维的，$S_i^*\in\mathcal{M}^C$. 故存在一个投射余模 $P\in\mathcal{M}^C$ 使得序列 $P\xrightarrow{f}S_i^*\to 0$ 正合. 于是有序列 $0\to S_i\xrightarrow{f^*}P^*$ 正合. 显然有 $f^*(S_i)\subseteq P_r^*$. 由引理 10.2.5 知在 P_r^* 中存在 $E(S_i)$ 的一个同构像. 故对任意 i 存在一个 $N\in{}^C\mathcal{M}$ 使得 $P_r^*\cong E(S_i)\oplus N$. 将有理对偶函子作用于该同构式得 $(P_r^*)^*\cong E(S_i)_r^*\oplus N_r^*$. 若能证明 $(P_r^*)_r^*$ 在 $(P_r^*)^*$ 中稠密，则 $E(S_i)_r^*$ 是 $E(S_i)^*$ 的稠密子空间. 又因为存在一个满同态 $g:P^{**}\to(P_r^*)^*.P^{**}$ 的惟一极大有理子模在 $(P_r^*)^*$ 中稠密，又因为 $P_r^{**}\supseteq P$, 故由满同态 g 知 $(P_r^*)^*r$ 在 $(P_r^*)^*$ 中稠密，从而对任意 i 有 $E(S_i)_r^*$ 在 $E(S_i)^*$ 中稠密. 故 (2) 得证.

(2)⇒(3). 对每个单左 C- 余模, 在 C_0 中存在同构像 T(其中 C_0 表示 C 的余根). 如果存在左余模 N 使得 $C_0=T\oplus N$. 由于 $E(T)\cap N=0, C=E(T)\oplus E(N)$, ($E(N)$ 是 N 的内射包络). 于是得下列行正合的交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & C_0^{\perp} & \to & C^* & \to & C_0^* & \to & 0\\
 & & \downarrow^{\pi} & & & & \downarrow & & \\
0 & \to & T^{\perp} & \to & E(T)^* & \to & T^* & \to & 0
\end{array}$$

其中 π 是投射：$C^*(\cong E(T)^*)\oplus E(N)^*\to E(T)^*$. 设 C^* 的单位元的象是 $x(=\pi(1_{C^*}))$ 有 $E(T)^*=C^*x$.

取 $t^*\in T^{\perp}$, 把 t^* 看作 C^* 中的元时，有 t^* 零化 T 和 $E(N)$. 故 t^* 零化 C_0. 于是有 $T^{\perp}=\pi(C_0^{\perp})=C_0^{\perp}x$. 由于 $T^{\perp}$ 在 $E(T)^*$ 中闭且 $E(T)_r^*$ 在 $E(T)^*$ 中稠密，故这两个子空间张成 $E(T)^*$, 即 $C^*=E(T)^*=C_0^{\perp}x+E(T)_r^*$. 由引理 10.2.6 和 Nakayama 引理知 $E(T)^*=C^*x=E(T)_r^*$. 从而 $E(T)^*$ 是循环有理模，显然 $E(T)^*$ 是有限维的，从而 $E(T)$ 是有限维余模.

(3)⇒(4). 设 M 是有限维右 C- 余模，由引理 10.2.6 知 M/JM 可以分解成单余模的有限直和，即 $M/JM=S_1\oplus\cdots\oplus S_t$. 对每个 S_i, 由于 S_i^* 是单左余模，S_i^* 的内射包络 I_i 是有限维的. 由引理 10.2.7(2) 知 $I_i^*\in\mathcal{M}^C$ 是 S_i 的投射盖. 设

$t_i : I_i^* \to S_i$ 是余模满同态且 $\ker t_i$ 是多余的. 则 $P = \oplus I_i^* \in \mathcal{M}^C$ 是投射的, 且有下列行正合交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & JM & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \bigoplus S_i & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & \nwarrow^{f} & \uparrow {\scriptstyle \oplus t_i = t} & & \\ & & & & & & P & & \end{array}$$

由于 t 是满同态 $f(P) + JM = M$. 由 Nakayama 引理知 $f(P) = M$, 且 $\ker f \subseteq JP$ 是多余的.

(4)⇒(1). 由 (4) 及余模的局部有限性即可证之.　　**证毕.**

定义 10.2.1　与 Bass 的论文 [17] 中的定义类似, 我们称余代数 C 是右 (左) 半完全, 如果每个有限维右 (左)C- 余模有投射盖.

注记　由定理 9.2.2 和定理 10.2.1 知 Hopf 代数 H 是左半完全当且仅当 H 是右半完全. 我们知道, 半完全代数或半完全环是左右对称的, 然而在余代数中, 这种对称性遭受到了破坏. 因为在余代数中, 有例子说明右半完全余代数不是左半完全 (反之亦然).

例 10.2.1　设 C 是由基 $\{g_k, d_k : k = 1, 2, \cdots\}$ 生成的向量空间, 余运算为:

$$\varepsilon(g_k) = 1,\ \varepsilon(d_k) = 0,\ \Delta(g_k) = g_k \otimes g_k,\ \Delta(d_k) = g_1 \otimes d_k + d_k \otimes g_{k+1}.$$

则 C 是右半完全但不是左半完全.

首先, 我们给出下面的引理来说明这个例子.

引理 10.2.9　设 C 是一个余代数, $\{e_i | i \in I\} \subseteq C^*$ 是一族正交幂等元使得 $\sum e_i = \varepsilon$ (表示 C 的余单位元). 如果 $e_i \rightharpoonup C = N_i$ 是单左余模 ($\forall i$), 则 $e_i \rightharpoonup C$ 是 N_i 的内射包络.

证明　如果 $i \neq j$, 则 $(e_i \rightharpoonup C) \cap (e_j \rightharpoonup C) = 0$, 并且 $C = \bigotimes e_i \rightharpoonup C (i \in I)$. 故每个 $e_i \rightharpoonup C$ 是内射的. 由于对每个 $e_i \rightharpoonup C$ 都有 $S(e_i \rightharpoonup C) = N_i$, 从而 $e_i \rightharpoonup C$ 是 N_i 的内射包络.　　**证毕.**

下面我们来说明这个例子.

定义 $g_i^*(g_k) = \delta_{jk}$, $g_j^*(d_k) = 0$, 则 C 是余根为 $C_0 = < g_k,\ k = 1, 2, \cdots >$ 是一个余代数. 由于 $\sum_{j=1}^{\infty} g_i^*(g_k) = 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} g_j^*(d_k) = 0$, 故 $\varepsilon = \sum_{j=1}^{\infty} g_j^*$. 故对每个 $k, g_k^* \rightharpoonup C$ 是 $< g_k >$ 的内射包络. 按通常的计算, 对 $k > 1$ 有 $g_1^* \rightharpoonup C = < g_1 >$, $g_k^* \rightharpoonup C = < g_k, d_{k-1} >$. 故这些内射包络都是有限维, 又因为单右余模 $< g_1 >$ 的内射包络是无限维的, 并且等于

$$C \rightharpoonup g_1^* = < g_1, d_1, d_2 \cdots > .$$

注记　一个代数 A 是左 (右) 完全当且仅当每个左 (右)A- 模都有一个投射盖. I.P.Lin 在文献 [89] 中证明了 C 是左和右半完全当且仅当每个右 C- 余模和左 C- 余模都有一个投射盖. 但我们不知道一个左 (右) 半完全余代数是否意味着每个左 (右)C- 余模有一个投射盖.

§10.3　半完全余代数和有理函子

命题 10.3.1　设 C 是一个右半完全余代数且 P 是一个投射右 C- 余模, 则 P 在 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 中投射.

证明　由局部有限性知, 存在一族有限维子摸 $\{M_i|i\in I\}$ 和一个满同态

$$\bigoplus_{i\in I} M_i \to P \to 0.$$

由定理 10.2.1 知, 对每个 $i\in I$ 存在一个投射 C- 余模 P_i 使得 M_i 是 P_i 的满同态像. 故有下列满同态

$$\bigoplus_{i\in I} P_i \to P \to 0.$$

由于 P 是投射, 存在 $P'\in \mathcal{M}^C$ 使得 $\bigoplus_{i\in I} P_i \cong P\oplus P'$. 又因为 P_i 在 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 中投射, 故 P 在 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 中投射.

注记　设 C 是一个右半完全余代数且 M 是任意右 C- 余模, 则

$$\mathrm{Pr\,oj.\,dim}(M_C) = \mathrm{Pr\,oj.\,dim}({}_{C^*}\boldsymbol{M}),$$

这是引理 9.2.2 在右半完全余代数下的一个推广. 对内射维数在文献 [153] 中有类似的结果. 一个 Grothenieck 范畴 A 的一个全子范畴 $\boldsymbol{C}$ 称为 **局部化**, 如果 C 对扩张, 直和, 取子对象和取商均封闭. $\boldsymbol{C}$ 中的对象称为 $\boldsymbol{C}$- 挠对象. 对 $\boldsymbol{A}$ 的局部子范畴 $\boldsymbol{C}$, 可以定义一个商范畴 $\boldsymbol{A/C}$. 有函子: $\boldsymbol{T:A\Leftrightarrow A/C:S}$ 使得 T 是一个正合函子且 S 是 T 的一个右伴随函子. 故 S 是一个左正合函子. 如果 $f:1_C\to SOT$ 是这个天然的自然变换 (也成为单位), 则对 $\boldsymbol{C}$ 中的每个对象 $f_A:A\to(SOT)(A)$ 有 $\boldsymbol{C}$- 挠核和余核. 而且, 另一个天然的自然变换 (也称为余单位)$g:ToS\to 1_{A/C}$ 是一个自然同构. 若局部子范畴 $\boldsymbol{C}$ 对直积封闭, 我们称 C 是 **TTF 类**.

命题 10.3.2　假设余代数 C 是右半完全, 则有理函子 $\boldsymbol{Rat}:{}_{C^*}\boldsymbol{M}\to{}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 是正合的. 因此 $\mathcal{M}^C$ 是 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 的一个局部子范畴.

证明　由于 Rat 是左正合函子, 设

$$0\to M'\to M\to M''\to 0$$

是 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 的一个正合列，于是有下列交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & r(M') & \xrightarrow{\mu'} & r(M) & \xrightarrow{v'} & r(M'') & \to 0 \\ & \downarrow i' & & \downarrow i & & \downarrow i'' & \\ 0 \to & M' & \xrightarrow{\mu} & M & \xrightarrow{v} & M'' & \to 0 \end{array}$$

其中 i', i 和 i'' 都是包含映射．由于 $\mathcal{M}^C$ 有足够多的投射模，故存在一个满同态 $f: P \to r(M'') \to 0$, 中 $P \in \mathcal{M}^C$ 投射．由命题 10.3.1 知 P 在 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 中也投射．于是存在 $g: P \to M$ 使得 $v \circ g = i'' \circ f$. 又因为 $\mathrm{Im} g \subseteq r(M)$, 用 $g': P \to r(M)$ 表示 g 的余限制，则 $g = i \circ g'$. 故 $v \circ i \circ g' = i'' \circ f$. 又因为 $v \circ i = i` \circ v'$, 从而有 $v` \circ g' = f$. 又因为 f 是满同态，因此 v 也是满同态．即证明了 Rat 是正合函子．显然 $\mathcal{M}^C$ 是 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 的一个局部子范畴．　　**证毕**.

定理 10.3.1　考虑下列论述：

(1) C 是左 Frobenius 余代数；

(2) C 是投射左 C^*- 模；

(3) C 是左半完全；

(4) 对每个右 C^*- 模有 $(M/M_r)_r = 0$.

一般地，有 (1)⇒(2)⇒(3)⇒ (4), 有例子表明 (2)⇏(1), (3)⇏(2), (4)⇏(3).

证明　(1)⇒(2). 由定理 10.2.3 知.

(2)⇒(3). 由引理 10.1.1 和定理 10.2.1 知.

(3)⇒(4). 由命题 10.3.2 知 Rat 是正合函子，由命题 10.1.1 知 (4) 成立.

证毕.

§10.4　半完全余代数和等价

我们用 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathcal{M}^C$ 的局部子范畴中的无挠左 C^*- 模类即 $\mathcal{F} = \{M \in {}_{C^*}M \mid \mathrm{Rat}(M) = 0\}$.

定理 10.4.1　设 C 是一个右半完全余代数，则 $\mathcal{F}$ 具有下列性质：

(1) $\mathcal{F}$ 是 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}$ 的一个局部子范畴；

(2) $\mathcal{F}$ 是一个 $\boldsymbol{TTF}$ 类对内射包络稳定；

(3) 商范畴 ${}_{C^*}\boldsymbol{M}/\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{M}^C$ 等价；

(4) 如果 $I =_r ({}_{C^*}\boldsymbol{C}^*)$, 则 I 是环 C^* 的双边理想，并且 C^*/I 是平坦右 C^*- 模.

证明　(1) 由 Rat 的正合性知 $\boldsymbol{F}$ 对同态像稳定.

(2) 显然.

(3) 对两个典范函子：

$$\mathrm{T}: {}_{C^*}\boldsymbol{M} \Leftrightarrow {}_{C^*}\boldsymbol{M}/\mathcal{F} : S$$

和函子的合成

$$F = T \circ i : \mathcal{M}^C \to {}_{C^*}M/\mathcal{F}$$

和

$$G = \mathrm{Rat} \circ S : {}_{C_*}M/\mathcal{F} \to \mathcal{M}^C,$$

其中 i 是包含函子. 故自然变换 $f : 1 \to S \circ T$ 导出了一个正合列:

$$0 \to \ker(f_M) \to M \xrightarrow{f_M} ST(M) \to Co\ker(f_M) \to 0,$$

其中 $\ker(f_M)$, $Co\ker(f_M) \in \mathcal{F}$. 将正合函子 Rat 作用于该正合列得同构

$$\mathrm{Rat}(f_M) : M \cong \mathrm{Rat}(ST(M)),$$

即证明了 $G \circ F$ 自然同构于 $1_{\mathcal{M}^C}$. 另一方面,如果 $X \in {}_{C_*}M/\mathcal{F}$, 则 $S(X)/\mathrm{Rat}(S(X)) \in \mathcal{F}$. 故 $T(S(X)/_r(S(X))) = 0$. 又因为 T 是正合函子, 从而有 $F \circ G$ 自然同构于 $1_{C^*M/\mathcal{F}}$.

(4) 显然 I 是 C^* 的双边理想, 且 $C^*/I \in \mathcal{F}$. 如果 $M \in_{C^*} \mathcal{M}$, 则 $IM \in \mathcal{M}^C$. 故对 $M \in \mathcal{F}$ 有 $IM = 0$. 于是, 对 C^* 的每个左理想 $K \supseteq I$ 使得 $C^*/I \in \mathcal{F}$. 从而有 I 是 ${}_{C^*}\mathcal{M}$ 的局部子范畴 $\mathcal{F}$ 所带的 Gabriel filter 惟一的极小理想. 故 $\mathcal{F}$ 与范畴 ${}_{C^*/I}M$ 同构. 对典范同态 $\pi : C^* \to C^*/I$. 函子 $\boldsymbol{C^*/I \otimes_{C^*} - : {}_{C^*}\mathcal{M} \to {}_{C^*/\mathcal{I}}\mathcal{M}}$ 是系数限制函子 $\boldsymbol{\pi_* : C^*/I \to_{C^*} M}$ 的左伴随. 在同构 $\mathcal{F} \cong_{C^*/I} \mathcal{M}$ 下, π_* 就是包含函子 $j : \mathcal{F} \to_{C^*M}$. 由于 $\mathcal{F}$ 对内射包络稳定, 故函子 $C^*/I \otimes_{C^*} -$ 正合, 即 C^*/I 是平坦右 C^*- 模. **证毕.**

§10.5 半完全余代数和 Colby-Fuller 对偶

关于模范畴的 Morita 对偶的概念在下面的定义下已经被 Colby 和 Fuller[34] 推广到 abelian 范畴. 在 abelian 范畴 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A'}$ 间的一对反变函子:

$$D : \boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{A'} : D'$$

称为右伴随的, 如果对每对 $A \in \boldsymbol{A}$ 和 $A' \in \boldsymbol{A'}$ 存在自然同构

$$\eta_{A,A'} : Hom_A(A, D'A') \to Hom'_A(A', DA)\ ,$$

由此得到函子的自然变换:

$$\tau : 1_A \to D \circ D' \text{ 和 } \tau' : 1'_A \to D' \circ D\ ,$$

其定义为 $\tau_A = \boldsymbol{\eta}^{-1}_{A,DA}(1_A)$ 和 $\boldsymbol{\tau}''_A = \boldsymbol{\eta}_{A',D'A'}(1_{D'A'})$. 自然变换 τ 和 τ' 决定了右 adjunction.$\boldsymbol{A}$ 的对象 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{A'}$ 的对象 A') 称为自反的, 如果 $\tau_A(\tau' A')$ 是同构. 如果

用 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_1'$ 表示自反对象作成的全子范畴，则 D 和 D' 在 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_1'$ 间定义了一个反变等价. 假设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}'$ 都是 Grothendieck 范畴. 利用文献 [34] 中的术语，我们称 D 和 D' 定义了一个 Colby-Fuller 对偶，如果 D 和 D' 都是正合函子，$\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_1'$ 分别对子对象，商对象和有限直和封闭，且分别包含 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_1'$ 的张成集. 本节的目的是证明若 C 是半完全余代数，则在子范畴 $\mathbf{Rat}(C^*-\text{Mod})$ 和 $\mathbf{Rat}(\text{Mod}-C^*)$ 间 (或等价地，$\mathcal{M}^C$ 和 C^*) 存在 Colby-Fuller 对偶.

对余代数 C, 我们将考虑下列一些有趣的左 C^*- 模子类:

$\mathcal{F}=\{M\in C^*\text{-Mod}|\text{Rat}(M)=0\}$,

$\boldsymbol{D}=\{M\in C^*-\text{Mod}\,|\text{Hom}_{C^*}(M,C^*)=0\}$,

$\beth=\{M\in C^*-\text{Mod}\,|C\otimes_{C^*}M=0\}$.

引理 10.5.1 如果 M 是任意的左 C^*- 模，则 $C\otimes_{C^*}M$ 是一个有理左 C^*- 模.

证明 设 $F\to M\to 0$ 是左 C^*- 模的一个自由表示. 函子 $C_{C^*}\otimes$- 作用于该正合列得 $C\otimes_{C^*}F\to C\otimes_{C^*}M\to 0$. 又因为 $C\otimes_{C^*}F$ 同构于 $\bigoplus_{C*}C$, 于是 $C\otimes_{C^*}F$ 是有理左 C^*- 模. 故 $C\otimes_{C^*}M$ 是有理. **证毕.**

引理 10.5.2 对任意余代数 C, 有 $\boldsymbol{D}=\beth$.

证明 必须证明 $M\in C^*$-Mod, 则 $\text{Hom}_{C^*}(M,C^*)=0$ 当且仅当 $C\otimes_{C^*}M=0$. 又因为有自然同构 $\text{Hom}_{C^*}(M,C^*)\cong(C\otimes_{C*}M)^*$. 故显然成立. **证毕.**

下面，我们将考虑 C^*-Mod 和 Mod-C^* 上的 Rat 函子. 我们将不区分左或右 C^*- 模. 对任意 $M\in C^*$-Mod, $\alpha_M:M\to M^{**}$ 是由典范的自然变换 $\alpha:1\to(\text{-})^{**}$ 确定. 另一方面，由包含映射 i:Rat$(M^*)\to M^*$ 导出满同态 $i^*:M^{**}\to(\text{Rat}(M^*))^*$. 于是得到一个自然变换 $\sigma:1\to(\text{-})^*\circ\text{Rat}\circ(\text{-})^*$, 其定义为：对任意 $M\in C^*$-Mod $\sigma_M=i^*\circ\alpha_M$. 若 M 是有理的，则有映射 $\sigma_M:M\to\text{Rat}(\text{Rat}(M^*)^*)$, 从而得自然变换 $\sigma:1\to\text{Rat}\circ(\text{-})^*\circ\text{Rat}\circ(\text{-})^*$. 类似地，可以定义右 C^* - 模的情形. 容易验算自然变换 σ 由下列右伴随对决定:

$$\text{Rat}\circ(\text{-})^*:\text{Rat}(C^*\text{-Mod})\leftrightarrow\text{Rat}(\text{Mod-}C*):\text{Rat}\circ(\text{-})*.$$

定理 10.5.1 对余代数 C, 下列条件等价:

(1) $\sigma_M:M\to(\text{Rat}(M^*)^*)$ 是单同态，对每个 $M\in\text{Rat}(C^*\text{-Mod})$;

(2) C 是右半完全;

(3) Rat : C^*-Mod $\to C^*$-Mod 是正合函子;

(4) Rat $\circ(\text{-})^*$:Mod$-C^*\to C^*$-Mod 是正合函子.

证明 (1)⇒(2). 由定理 10.2.1, 只须证明对任意 $M\in\text{Rat}(C^*\text{-Mod})$ 有 Rat$(M*)$ 在 M^* 中稠密即可. 设 $m\in M$ 使得对任意 $f\in\text{Rat}(M^*)$ 有 $f(m)=0$. 由于 $\sigma_M(m)=(i^*\circ\alpha_M)(m)=\alpha_M(m)\circ i$. 于是对任意 $f\in\text{Rat}(M^*)$, 有 $[\sigma_M(m)](f)=$

$[\alpha_M(m)](f) = f(m) = 0$, 从而 $\sigma_M(m) = 0$, 故 $m = 0$, 即证 $\mathrm{Rat}(M^*)$ 在 M^* 中稠密.

(2)⇒(3). 由命题 10.3.2 知结论成立.

(3)⇒(4). 显然.

(4)⇒(1). 假设 $M \in \mathrm{Rat}(C^*\text{-Mod})$, 取 $m \in M$ 使得 $\sigma_M(m) = 0$. 由余模的局部有限性知, 存在 M 的一个包含 m 的有限维 C^*- 子模 N. 设 $j : N \to M$ 是包含映射. 有 $\sigma_M \circ j = \mathrm{Rat}(j^*)^*) \circ \sigma_N$. 由于 $\mathrm{Rat}\circ(-)^*$ 是正合函子, 有 $\mathrm{Rat}(j^*)^*)$ 是单同态. 另一方面, 由于 N 是有限维的, N^* 是一个有理右 C^*- 模. 故包含映射 $\mathrm{Rat}(N^*) \to N^*$ 是单位映射. 从而有 $\sigma_N = \alpha_N$ 且 α_N 是双射. 于是 $\sigma_M \circ j$ 是单同态. 又因为 $\sigma_M \circ j(m) = 0$, 故 $m = 0$. **证毕**.

引理 10.5.3 设 C 是右半完全, $M \in \mathrm{Rat}(C^*\text{-Mod})$. 如果 $\mathrm{Rat}(\alpha_M) : M \to \mathrm{Rat}(M^{**})$ 是满同态, 则 $\sigma_M : M \to \mathrm{Rat}(\mathrm{Rat}(M^*)^*)$ 是同构.

证明 由定理 10.5.1 知, 只须证明 σ_M 是满同态即可. 由于 $\sigma_M = \mathrm{Rat}(i^* \circ \alpha_M)$, 其中 i:$\mathrm{Rat}(M^*) \to M^*$ 是包含映射. 于是 $\sigma_M = \mathrm{Rat}(i^*) \circ \mathrm{Rat}(\alpha_M)$. 由命题 10.3.2 知 $\mathrm{Rat}(i^*)$ 是满同态. **证毕**.

定理 10.5.2 余代数 C 是左和右半完全当且仅当函子

$$\mathrm{Rat} \circ (-)^* : \mathrm{Rat}(C^* - \mathrm{Mod}) \leftrightarrow \mathrm{Rat}(\mathrm{Mod} - C^*) : \mathrm{Rat} \circ (-)^*$$

定义了一个 Colby-Fuller 对偶, 并且 ${}_{C^*}C$ 和 C_{C^*} 是自反的.

证明 充分性由定理 10.5.1 知. 假设 C 是一个左和右半完全余代数. 由定理 10.5.1 知函子 $\mathrm{Rat}\circ(-)^*$ 是正合函子. 如果 M 是有限维有理左 C^*- 模, 则 M^* 是有限维右有理右 C^*- 模, 故 M^{**} 是有限维左 C^*- 模. 从而有 $\mathrm{Rat}(M^{**}) = M$ 且 $\mathrm{Rat}(\alpha_M) = \alpha_M, \alpha_M$ 是同构. 由引理 10.5.3 知 σ_M 是满同态. 故每个有限维有理左 C^*- 模自反. 由有理余模的局部有限性知, 任意一族有限维有理左 C^*- 模同构类的代表类似的 $\mathrm{Rat}(C^* - \mathrm{Mod})$ 一族自反生成元. 由于 $\mathrm{Rat}\circ(-)^*$ 是加法函子, 从而有自反有理左 C^*- 模的有限直和自反. 如果 $M \in \mathrm{Rat}(C^* - \mathrm{Mod})$ 自反且 $N \subseteq M$ 是一个 C^*- 子模, 则有行正合图表:

$$\begin{array}{ccccccc} & N & \to & M & \to & M/N & \to 0 \\ & \sigma_N \downarrow \sigma_N & & \sigma_m \downarrow \sigma_M & & \sigma_{M/N} \downarrow \sigma_{M/N} & \\ 0 \to & \mathrm{Rat}(\mathrm{Rat}(N^*)^*) & \to & \mathrm{Rat}(\mathrm{Rat}(M^*)^*) & \to & \mathrm{Rat}(\mathrm{Rat}(M/N^*)^*) & \to 0 \end{array}$$

由于 σ_M 是同构, $\sigma_{M/N}$ 是单同态, 从而有 $\sigma_{M/N}$ 和 σ_N 都是同构. 故证明了由所有自反有理左 C^*- 模作成的 $\mathrm{Rat}(C^*\text{-Mod})$ 的全子范畴是有限闭的. 同理可证对右 C^*- 模的情形结论也成立. 从而证明了函子 $\mathrm{Rat}\circ(-)^*$ 定义了一个 Colby-Fuller 对偶. 下证明 ${}_{C^*}C$ 自反. 由引理 10.5.3 知只须证明 $\mathrm{Rat}(\alpha_C) : C \to \mathrm{Rat}(C^{**})$ 是满同态即可. 而由文献 [89] (p.371) 知 $\mathrm{Rat}(\alpha_C)$ 是满同态. **证毕**.

第 11 章　quasi-Frobenius 余代数

在第 10 章，我们已指出，如果 ${}^C\mathcal{M}(\mathcal{M}^C)$ 有足够多的投射余模，则称余代数 C 左 (右) 半完全 [89]. 余代数 C 是半完全的一个充分条件是 C 是投射 C^*- 模. 在第 9 章我们知道，余代数 C 称为左 Frobenius, 如果存在一个从 C 到 C^* 的左 C^*- 单同态. 有限维左和右 Frobenius 余代数正好是 Frobenius 代数的对偶余代数. Torrecillas 和 Nastasescu 在文献 [144] 中很自然地用左 quasi-Frobenius(简记为 QcF) 的概念推广了 Frobenius 余代数的概念. 我们称余代数 C 是左 QcF 当且仅当存在一个从 ${}_{C^*}C$ 到自由左 C^* - 模 $({}_{C^*}C^*)^{(I)}$ 的左 C^*- 模单同态. 我们注意到 QcF- 余代数比 Frobenius 余代数要广泛得多 (见文献 [144],Remark 1.5). 有限维 QcF- 余代数正好是有限维 QF- 代数的对偶. 实际上，QcF- 余代数的作用在许多方面与 QF 代数很相似. 下列等价条件在见文献 [144] 中已经被证明.

C 是左 QcF 余代数当且仅当 C 是无挠左 C^*- 模当且仅当存在一族 C- 平衡的双线性形 $\{b_i: C\times c\to k|i\in I\}$ 使得对每个 $x\in C$ 存在 $i\in I$ 使得 $b_i(C,x)\neq 0$ 当且仅当每个内射右 C- 模投射当且仅当 C 是投射右 - 余模当且仅当 C 是投射左 C^*- 模.

环 R 是 QF- 环当且仅当每个投射右 (左)R- 模内射当且仅当每个内射右 (左)R- 模投射. 由上面的等价条件知存在左 QcF 余代数其余模范畴存在非投射的内射左 C - 余模. 一般地，左 QcF 余代数不是右 QcF 余代数.

我们在文献 [154] 中证明了右 (左)QcF 余代数上的任意投射右 (左)C- 余模是内射的，并且给出了 QcF 余代数的一些自然刻画.

在文献 [132] 中 D. Stefen 研究了从 C 到 M 的余模同态空间 S_M 的维数. 他证明了对任意有限维 C - 余模 M 和任意余代数 C(有一些附加特征)$dim(SM)\leqslant dim(M)$. 我们将这些结果自然地推广到了 QcF- 余代数.

§11.1　QcF- 余代数的刻画

引理 11.1.1　每个不可分投射右余 - 模作为 k- 向量空间是有限维的.

证明　由余模的局部有限性知，存在一个左 C^*- 模，或等价地说，右 C - 余模满同态:

$$f: \bigoplus_{i\in I} M_i \to E\ ,$$

其中 M_i 是一族有限维有理左 C^*- 模. 由于 E 投射，于是上面的序列是一个分裂

满同态. 于是存在右 C - 余模 E' 使得 $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong E\oplus E'$. 由于 M_i 是有限维的左 C^*- 模, 故 M_i 可分解为有限个有限长度的不可分左 C^* - 模的直和. 由 Azumaya 定理知 E 同构于某个 E_i 的直和项. 特别地, E 作为 k- 向量空间是有限维的. **证毕**.

定理 11.1.1　下列条件等价:

(1) C 是左 QcF ;

(2) C 是无挠左 C^* - 模;

(3) 存在一族 C- 平衡的双线性形 $\{b_i: C\times c\to k|i\in I\}$ 使得对每个 $0\neq x\in C$ 存在 $i\in I$ 使得 $b_i(C,x)\neq 0$;

(4) 每个内射右 C- 余模投射;

(5) C 是投射右 C- 余模;

(6) C 是投射左 C^*- 模;

(7) C 是左半完全且每个投射 C- 余模内射, 并且不存在内射维数 $inj.dimN=1$ 的左 C- 余模 N ;

(8) 每个有限余生成内射右 - 余模投射;

(9) 每个右 C- 余模都可以嵌入一个自由左 C^* - 模中.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 显然成立.

(2) $\Rightarrow$ (3). 令 $\theta: C\to (C^*)^I$ 是一个左 C^* - 模单同态.　$P_i:(C^*)^I\to C*$ 表示第 i 个典范映射 (任意 $i\in I$) 且定义 $b_i: C\otimes C\to k$ 为 $b_i(c,d)=P_i\theta(d)(c)$, 由引理 9.2.2 知 b_i 是 C- 平衡的双线性形. 如果 $0\neq x\in C$, 则 $\theta(x)\neq 0$. 故存在 $i\in I$ 使得 $P_i\theta(x)\neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (2). 定义 $\theta: C\to (C*)^I$ 为 $\theta(c)=(\theta_i(c))_{i\in I}$, 其中 $\theta_i(c): C\to k$ 由 $\theta_i(c)(d)=d_i(d,c)$ 确定. 由于 b_i 是一个 C- 平衡的双线性形, 对每个 $i\in I$, θ_i 是个左 C^*- 模同态. 易证 θ 是一个左 C^*- 模单同态. 故 C 是无挠左 C^*- 模.

(2) 和 (3) $\Rightarrow$ (4). 令 $C_C=\bigoplus_{j\in J} E(S_j)$, 其中 $E(S_j)$ 表示极小右理想 S_j 在 $\mathcal{M}^C$ 中的内射包络. 令 $S=C^*x(0\neq x\in C)$. 则存在 $i\in I$, $c\in C$ 使得 $b_i(c,x)\neq 0$. 左理想 $({}_CC^*)^\perp=\{y\in C\,|b_i\,(y,z)=0$, 任意 $z\in {}_CC^*\}$ 满足 $({}_CC*)^\perp\bigcap S=0$. 故由定理 9.2.2 的证明知, 对 C 的每个极小右理想 S 有 $E(S)$ 是有限维.

由于已证 $E(S)$ 是一个 Artin 无挠左 C^*- 模, 从而 $E(S)$ 可以嵌入一个有限生成自由左 C^*- 模. 又因为 $E(S)$ 是一个内射左 C^* - 模. 故 $E(S)$ 同构于一个自由左 C^*- 模的直和项. 从而, $E(S)$ 是一个投射左 C^*- 模. 于是, 有 C 是投射左 C^*- 模.

(4) $\Rightarrow$ (5). 显然成立.

(5) $\Rightarrow$ (6). 设 V 是一个内射右 C - 余模, 则 V 同构于 ${C_C}^{(X)}$ 的直和项 (对某个集合 X). 由于 C_C 是投射右 C- 余模, 故 V 是一个投射右 C- 余模.

(6) ⇒ (1). 由 (5) ⇒ (4) 知内射右 C - 余模 C 是投射的，另一方面，

$$C_C \cong \bigoplus_{i\in J} E(S_j),$$

其中 $E(S_j)$ 是极小右 C - 余理想的内射包络. 故每个 $E(S_j)$ 是有限不可分投射右 C- 余模. 由引理 11.1.1 知， $E(S_j)$ 是有限维. 故 $E(S_j)$ 是投射左 $C*$- 模. 从而证明了 C 是左 QcF. **证毕.**

为了证明定理的后面部分，我们先证明下列引理.

引理 11.1.2 C^* 是右自 - 内射环当且仅当 C 是平坦左 C^*- 模.

证明 由于 ${}_{C*}C$ 是平坦的当且仅当 $\mathrm{Hom}_k(C,k)$ 是内射右 C^* - 模. 即证结论成立. **证毕.**

易证下列引理

引理 11.1.3 如果 C 是一个左 QcF- 余代数，则 C^*- 是右自 - 内射环.

引理 11.1.4 如果 C 是一个左 QcF- 余代数，则 C 是范畴 ${}^C\mathcal{M}$ 的一个生成元.

证明 由于有限维左 C- 余模生成 ${}^C\mathcal{M}$. 只须证明 C 生成每个有限维左 C- 余模即可. 如果 $M\in\mathcal{M}$ 是有限维，存在一个右 C^*- 模满同态： $(C^*)^n\to M\to 0$. 由定理 10.5.1 和上面的等价知， Rat 是正合函子. 于是得满同态： $r(C^*)^n\to M\to 0$. 由引理 11.1.3 知 C^*- 是右自 - 内射环. 易见 $r(C^*)\subseteq C^*$ 是一个内射左 C- 余模. 由于每个左余模都可以嵌入 C 的直和中，左 C- 余模 $r(C*)$ 是 $C^{(I)}$ 的直和项 (I 是某个集合). 特别地，存在满同态： $C^{(I)}\to r(C^*)$. 即证明了 C 生成 M.

下面继续证明定理:

(1) ⇒ (7). 由假设知 C 是左半完全. 于是 ${}^C\mathcal{M}$ 中有足够多的投射左 C- 余模. 设 P 是任意一个投射左 C- 余模，由于 C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 的一个生成元，从而有正合列 $C^{(I)}\to P\to 0$. 又因为 P 是投射左 C- 余模，故 P 是 $C^{(I)}$ 的直和项. 于是 P 是内射左 C- 余模. 假设 N 是内射维数等于 1 即 $inj.dimN=1$ 的一个左 C-余模. 由文献 [106] 知存在一个单左 C- 余模 S 使得 $\mathrm{Ext}^1_C(S,N)\neq 0$. 由正合列 $0\to S\to C\to C/S\to 0$ 得 $\mathrm{Ext}^2_C(C/S,N)\cong\mathrm{Ext}^1_C(S,N)\neq 0$. 故 $inj.dimN\neq 1$ 与 $inj.dimN=1$ 矛盾. 由文献 [106] 知左 QcF 余代数的总体维数是 0 或 ∞. 故结论成立.

(7) ⇒ (1). 设 S 是 C 的一个极小右余理想. 下证 S 的内射包络 $E(S)$ 投射. 由于 C 是左半完全, 存在 $E(S)$ 的一个投射盖 P 使得序列 $0\to\ker f\to P\to E(S)\to 0$ 正合. 由假设知 $\ker f$ 内射. 故 $\ker f=0$, 即证 $E(S)$ 投射. 故由 $C=\bigoplus_{i\in I}E(S_i)$ 知 C 是左 QcF.

(1) ⇒ (7). 设 M 是任意一个有限余生成内射右 C- 余模，存在一个左 C- 余模正合列 $0\to M\to C^{(I)}$. 由于 M 是内射余模，故 M 同构于 $C^{(I)}$ 的直和项，即证

M 是投射右 C- 余模.

(1) ⇒ (9). 设 M 是任意右 C- 余模, 则存在一个右 C- 余模正合列: $0 \to M \to C^{(I)}$, 作为左 C^*- 模 $0 \to M \to C^{(I)}$ 也正合. 由因为 C 是左 QcF- 余代数, 故 M 可以嵌入一个自由左 C^*- 模.

(3) ⇒ (1) 和 (4) ⇒ (1) 易证.　　**证毕.**

注记　(1) 条件 (4) 类似于 QF- 环的一个特征.

(2) 设 C 是一个有限维余代数, 则 C 是左 QcF 当且仅当 C^* 是 QF- 环. 故一个有限维余代数是左 QcF- 余代数当且仅当它是右 QcF- 余代数. 一般地, 对无限维不成立.

(3) 由于存在不是 Frobenius 代数的有限维代数. 取对偶余代数, 得到一个 QcF-余代数但它不是 Co-Frobenius 余代数.

命题 11.1.1　(1) 设 C 是一个左半完全余代数且每个投射左 C- 余模内射, 则 C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 中的一个生成元;

(2) 如果 C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 中的一个生成元且每个平坦左 C^*- 模无挠, 则 C 是左 QcF.

证明　(1) 对任意左 C- 余模 M, 由于 C 是左半完全, 于是有一个满同态 $P \to M \to 0$, 其中 P 是一个投射左 C- 余模. 对 P, 有一个单同态 $0 \to P \to C^{(I)}$. 由假设知有一个满同态 $C^{(I)} \to P \to 0$, 故 C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 中的一个生成元.

(2) 由于 C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 中的一个余生成元, 下证每个有限维右 C- 余模都是 C^*-无挠模. 设 M 是一个有限维右 C- 余模, 则存在一个有限维左 C- 余模 N 使得 $M \cong N^*$. 由于 C 是一个生成元, 从而有正合列 $C^{(I)} \to N \to 0$. 故 M 是 C^*- 无挠模. 由局部有限性知 $C = \lim(C_i)$, 其中 C_i 都是有限维右余理想. 对每个 C_i 有一个正合列 $0 \to C_i \to C^{*^{(m_i)}}$, 其中 m_i 是自然数. 由余 - 无限函子的正合性知序列 $0 \to C \to \lim C_i^{(m_i)}$ 正合. 易见 $\lim C_i^{(m_i)}$ 是平坦左 C^*- 模. 由文献 [144] (Theorem 1.3) 知道 C 是左 QcF- 余代数.　　**证毕.**

注记　我们列出余半单代数的一些特征. 其中一些是很著名的结果.

C 是余半单代数当且仅当 C 是单子余代数的直和当且仅当每个有理左 C^* -模是完全可约的. 每个单右 C - 余模内射当且仅当每个有限维右 C- 余模内射当且仅当每个有限余生成右 C- 余模内射当且仅当每个 quasi- 有限右 C- 余模内射. 下面的论述也成立.

C 是左 QcF 且是左遗传余代数当且仅当 C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 中的一个生成元且是左遗传的.

命题 11.1.2　设 C 是一个余代数, 则下列条件等价:

(1) C 是左、右 QcF 余代数;

(2) C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 中的一个投射生成元;

(3) C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 中的一个内射生成元;

(4) C^* 是左、右自内射环且 C 是 ${}^C\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^C$ 中的一个生成元.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由定理 11.1.1 及引理 11.1.4 知.

(2) $\Rightarrow$ (1). 由定理 11.1.1 知 C 是左 QcF- 余代数. 而且 C 是右 QcF 当且仅当 C_{C^*} 无挠. 由文献 [142] 知 C_{C^*} 是它的 Socle 的本质扩张. 故 $C_{C^*} = \bigoplus_{i\in I} E(S_i)$. 要证 C_{C^*} 无挠, 由于 C^* 是右自内射环, 只须证明每个 S_i 是无挠右 c^*- 模. 又因为 S_i 是有限维的. 故只要能证明每个有限维左 C- 余模无挠, 则 C 是右 QcF 余代数. 由于 C 是 $\mathcal{M}^C$ 中的一个生成元, 易证每个有限维左 C- 余模无挠. 故结论成立.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) 同理可证.

(4) $\Rightarrow$ (1) 由 (2) $\Rightarrow$ (1) 的证明易证之. **证毕.**

我们提两个相关的问题:

我们知道, 如果 C 是左 QcF- 余代数, 则 C^* 是右自内射环. 由引理 11.1.2 知 ${}^*_C C^*$ 是平坦模且 ${}_{C^*}C$ 是无挠的. 故我们问:

1. 命题 11.1.1(2) 的逆命题是否成立? 即条件 "C 是一个左 QcF- 余代数" 能否推出每个平坦左 C^*- 模无挠?

显然, 在有限维的情况下, 上面的问题是肯定成立的, 因为此时 C^* 是 QF-环.

如果 C^* 是 QF- 环, 则 C^* 是右自内射环. 于是由引理 11.1.2 知 ${}_{C^*}C$ 平坦. 又因为 C^* 是 QF- 环, 故 ${}_{C^*}C$ 投射即 C 是左 QcF 余代数. 我们知道 C^{*^0} 在 C^* 中稠密.

2. 如果 C^* 是 QF- 环, C^{*0} 是否是 QcF- 余代数?

§11.2 QcF- 余代数整元素的唯一性

现在, 我们研究从 C 到 M 的余模同态空间 SM 的维数. 我们知道 $C^*_{rat} = \{c^* \in C^* \,|\ker c^*$ 包含一个有限余维数右余理想 $\}$. 我们给出下面的定理.

定理 11.2.1 设 C 是一个左, 右 QcF- 余代数且 M 是一个有限维右余模. 如果 $Ext'_{C^*}(C^*_{rat}/C, M) = 0$, 则 $\dim(S_M) \leqslant \dim(M)$.

证明 对正合列: $0 \to C \to {}_{C^*}C^*_{rat} \to {}_{C^*}C^*_{rat}/C \to 0$, 由于 $Ext'_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}/C, M) = 0$ 得正合列:

$$0 \to Hom_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}/C, M) \to Hom_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}, M) \to Hom_{C^*}(C, M) \to 0.$$

下证作为 k- 空间有 $Hom_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}, M) \cong M$.

由于 C 是左 QcF- 余代数, C 一定是左半完全, 故由文献 [42] 知 $E(M)$ 是一个有限维内射 C^*- 模. 由于 C 是右 QcF- 余代数, 由文献 [132] 知 ${}_{C^*}C^*_{rat}$ 在 ${}_{C^*}C^*$ 中

稠密. 用与文献 [132] 中命题 2 相同的证明方法可证 $Ext'_{C^*}(C^*/_{C^*}C^*_{rat}, M) = 0$. 由正合列:

$$0 \to {}_{C^*}C^*_{rat} \to C^* \to C^*/_{C^*}C^*_{rat} \to 0$$

得正合列:

$$0 \to Hom_{C^*}(C^*/_{C^*}C^*_{rat}, M) \to Hom_{C^*}(C^*, M) \to Hom_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}, M) \to 0.$$

用与文献 [132] 定理 3 类似的证明方法知 $Hom_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}, M) \cong M$(作为 k- 空间). 由正合列: $0 \to Hom_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}/C, M) \to Hom_{C^*}({}_{C^*}C^*_{rat}, M) \to Hom_{C^*}(C, M) \to 0$ 知: $\dim(S_M) \leqslant \dim(M)$. **证毕.**

引理 11.2.1　设 H 是一个 Hopf 代数, 则下列论述等价:

(1) H 有一个非零左整元素;

(2) H 是左 QcF-Hopf 代数;

(3) H 是一个非零右整元素;

(4) H 是右 QcF-Hopf 代数.

证明　(1) ⇒ (2). 由于任意左 Frobenius 余代数都是左 QcF- 余代数, 从而 (2) 成立.

(2) ⇒ (3). 由于 H 是左 QcF-Hopf 代数, 于是由文献 [144] (Theorem 1.3) 知, 存在一族 H- 平衡的双线性形 $\{b_i: H \times H \to k\}$ 使得 $b_i(H, x) \neq 0$. 设 I 是 H 的一个极小左理想, 则 I 是有限维的. 易证 $I^{\perp}$ 是 H 的一个余无限维右余理想. 从而 H 包含一个非平凡有限余维右余理想, 由文献 [138] (2.14) 知 H 有一个非零右理想.

(3) ⇒ (4) 和 (4) ⇒ (1) 显然成立.　**证毕.**

由文献 [132], (Theorem 5) 的证明及引理 11.2.1 有下面的推论.

推论 11.2.1　设 H 是一个左 QcF Hopf 代数, M 是一个有限维右 H- 余模, 则 $\dim(S_M) \leqslant \dim(M)$. 特别地, 对任意 Hopf 代数 H, 有 $\dim(S_H) \leqslant 1$.

§11.3　QcF- 余代数和 Colby-Fuller 对偶

设 C 是一个余代数, 我们在 §10.5 中考虑了下列一些有趣的左 C^* - 模子类, 它们在本节中也会被经常使用.

$\mathcal{F} = \{M \in C^* - Mod | Rat(M) = 0\}$,

$\boldsymbol{D} = \{M \in C^* - Mod | Hom_{C^*}(M, C^*) = 0\}$,

$\sqsupset = \{M \in C*^* - Mod \,|C \otimes {}_{C*}M) = 0\}$.

在 §10.5 中, 我们已证明了下列结论:

(1) 如果M是任意一个左 C^*- 模, 则 $C \otimes {}_{C^*}M$ 是一个有理左 C^*- 模 (见引理 10.5.1);

(2) 对任意余代数 C, 有 $\boldsymbol{D}$=ℶ(见引理 10.5.2).

如果 $M \in {}_{C^*}\boldsymbol{M}$, 则 $M^+ = Hom_{C^*}(M, C^*)$ 是一个典范右 C^*- 模. 于是得一个反变函子:

$$(\text{-})^+ = Hom_{C^*}(M, C^*) : {}_{C^*}\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_{C^*}.$$

我们将证明对 QcF- 余代数, 函子 $Rat \circ (\text{-})^+$ 给出了范畴 $Rat \circ (\text{-})^*$ 和 $Rat \circ (\text{-})^+$ 之间的一个 Colby-Fuller 对偶. 由于每个 QcF- 余代数是半完全的, C^* 是左、右自 - 内射环, 我们已经知道函子 $Rat \circ (\ )^+$ 是正合函子. 对 $M \in {}_{C^*}M$, 用 $\beta_M : M \to M^{++}$ 表示由典范自然变换 $\beta : 1 \to (\text{-})^{++}$ 给出的映射. 把自然变换 $\rho : 1 \to ()^+ \circ Rat \circ ()^+$ 对 $M \in {}_{C_*}\boldsymbol{M}$ 的作用定义为合成映射 $i^+ \circ f_M$, 其中 $i : Rat(M^+) \to M^+$ 是包含映射.

引理 11.3.1 设 C 是一个右半完全余代数. 如果 $M \in C^* - Mod$ 且 $Rat(M^*) = 0$, 则 $Rat(M) = 0$. 特别地, $\boldsymbol{D} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{F}}$.

证明 设 $R = Rat(M) \in Rat(C^*\text{-Mod})$. 于是有满同态 $M^* \to R^* \to 0$. 由于 Rat 是一个正合函子且 $Rat(M^*) = 0$. 于是 $Rat(R^*) = 0$. 由定理 10.5.1 知 $\sigma_R : R \to Rat(Rat(R^*)^*) = 0$ 是一个单同态, $R = 0$. **证毕.**

引理 11.3.2 设 C 是一个右半完全余代数, $M \in C^*$ -Mod, 则 $M^+ = 0$ 当且仅当 $Rat(M^+) = 0$.

证明 假设 $Rat(M^+) = 0$, 由于 $M^+ \cong (C \otimes_{C^*} M)^*$. 由引理 11.3.1 知 $Rat(C \otimes_{C^*} M) = 0$. 故由引理 10.5.1 知 $C \otimes_{C^*} M = 0$, 由引理 10.5.2 知 $M^+ = 0$. **证毕.**

命题 11.3.1 设 C 是一个左, 右 QcF- 余代数. 如果 $M \in C^* - Mod$ 满足 $\beta_M : M \to M^{++}$ 同构, 则 $\rho_M : M \to (Rat(M^+)^+)$ 同构.

证明 由正合列 $0 \to Rat(M_+) \to M^+ \to N \to 0$ 有 $N^+ = 0$. 如果 $N^+ \neq 0$, 则存在 N 的一个同态像 T 使得 T 可嵌入 $C^*_{C^*}$ 中. 设 $j : T \to C^*_{C^*}$ 为嵌入映射. 于是得正合列 $0 \to R \to M^+ \xrightarrow{\pi} T \to 0$ 从而得单同态 $\pi^+ : T^+ \to M^{++}$. 令 $S = Im(\beta_M)^{-1} \circ \pi^+ \subseteq M$. 下证 $\text{Ker}\pi = \{f \in M^+ | f|_S = 0\}$. 设 $f \in \ker\pi$, $m \in S$. 存在 $g \in T^+$ 使得 $m = [(\beta_M)^{-1} \circ \pi^+](g)$. 于是 $f(m) = \beta_M(m)(f) = \beta_M([(\beta_M)^{-1} \circ \pi^+](g))(f) = \pi^+(g)(f) = g(\pi)(f)) = g(0) = 0$. 故 $\ker\pi \subseteq \{f \in M^+ | f|_S = 0\}$. 下证 $\{f \in M^+ | f|_S = 0\} \subseteq \ker\pi$. 设 $f \in M^+$ 使得 $f|_S = 0$. 由于 $j \in T^+$, 存在 $m \in S$ 使得 $\pi^+(j) = \alpha_M(m)$. 于是 $j(\pi(f)) = (\pi^+(j))(f) = \alpha_M(m)(f) = f(m) = 0$. 从而有 $\pi(f) = 0$, 即 $f \in \ker\pi$. 故 $\ker\pi = \{f \in M^+ | f|_S = 0\}$.

令 $\Psi = i^+ : M^+ \to S^+$, 其中 $i: S \to M$ 是包含映射. 由于 $\ker\pi = \{f \in M^+ | f|_S = 0\}$, 有 Ψ 零化 R ; 于是可以导出 $\Psi' : T \to S^+$ 使得 $\Psi' \circ \pi = \psi$. 由 $\ker\pi = \{f \in M^+ | f|_S = 0\}$ 知 ψ' 是一个单同态. 由于 C^* 是左自 - 内射, $i^+ = \psi$ 是一个满同态, 故 $T \cong S^+$. 而且 $Rat(T) = 0$, 由于它是 $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ 中某个元的同态像, 故

$Rat(S^+) = 0$. 由引理 11.3.1 知 $S^+ = 0$ 即 $T = 0$ 矛盾. 故 $N^+ = 0$. 因此, 典范映射 $M^{++} \to (Rat(M^+)^+)$ 同构, 又因为 β_M 也是一个同构, 于是有 $\rho_M : M \to (Rat(M^+)^+)$ 是一个同构.　　**证毕.**

定理 11.3.1　设 C 是一个左, 右 QcF- 余代数. 则函子

$$Rat \circ (\text{-})^+ : Rat(C^* - Mod) \leftrightarrow Rat(Mod - C^*) : Rat \circ (\text{-})^+$$

是一个 Colby-Fuller 对偶. 而且 ${}_{C^*}C$ 和 C_{C^*} 在此对偶下都是自反的.

证明　用与定理 10.5.2 的证明类似的方法易证 $Rat \circ (\text{-})^+$: $Rat(C^*\text{-}Mod) \leftrightarrow Rat(Mod\text{-}C^*) : Rat \circ (\text{-})^+$ 是一个 Colby-Fuller 对偶. 下证 ${}_{C^*}C$ 是自反的. 由定理 10.5.2 知若函子 $Rat \circ ()^*$ 给出一个 Colby-Fuller 对偶, 则 ${}_{C^*}C$ 是自反的. 由文献 [42] (Lemma2) 知 Colby-Fuller 对偶中的自反对象正好是线性稠密对象. 又因为该条件与定义对偶的具体函子是独立的. 故 ${}_{C^*}C$ 在由函子 $Rat \circ (\text{-})^+$ 定义的 Colby-Fuller 对偶中也是自反的.　　**证毕.**

§11.4　QcF- 余代数和等价

设 C 和 D 是域 k 上的任意两个余代数. $\mathcal{M}^C$ 和 $\mathcal{M}^D$ 分别表示相应的右余模范畴, 1_C 和 1_D 分别是 $\mathcal{M}^C$ 和 $\mathcal{M}^D$ 中的单位函子. 则 C 和 D 称为等价如果范畴 $\mathcal{M}^C$ 和 $\mathcal{M}^D$ 等价, 即存在一对共变加法函子 F: $\mathcal{M}^C \leftrightarrow \mathcal{M}^D$: G 使得 $G \circ F$ 自然同构于 1_C,$F \circ G$ 自然同构于 1_D(见文献 [88]). 在文献 [88] 中已经证明了若 M 在 $\mathcal{M}^C$ 中具有的任意范畴性质则 M 在 $\mathcal{M}^D$ 中的象也具有相同的范畴性质. 例如: 投射、生成元等已经证明了. 下面, 我们考虑 QcF- 余代数. 由文献 [146] 知, 一般地, 有限余生成的性质不是等价不变量, 于是给出下面的定理.

定理 11.4.1　设 C 和 D 等价, F 和 G 表示相应范畴的等价函子 F: $\mathcal{M}^C \leftrightarrow \mathcal{M}^D$: G, 则

(1) C 几乎连通当且仅当 D 几乎连通;

(2) C 是右 QcF- 余代数当且仅当 D 是右 QcF- 余代数;

(3) 如果 C 几乎连通, 则 N_C 有限余生成当且仅当 $F(N_C)$ 有限余生成.

证明　(1) 证 D 几乎连通. 由于等价, 可以转化为证 $\text{Corad}(D) = F(\text{Corad}(C))$. 由因为有限维是等价不变性, 故 D 几乎连通.

(2) 设 C 是右 QcF- 余代数, M_D 是任意内射右 D- 余模. 则对任意 N_D 有同构:

$$Com_D(M_D, N_D) \cong Com(G(M_D), G(N_D)) .$$

由文献 [7] 知 C Morita-Takellchi 等价于 D, $G(M_D)$ 是内射 C- 余模. 又因为 C 是右 QcF- 余代数, G (M_D) 投射且 $Com_D(M_D,\text{-})$ 是正合函子. 故 D 是右 QcF- 余代数.

(3) 由于 C 等价于 D, 由文献 [88] 的注知 $\mathcal{M}^C$ 强等价于 $\mathcal{M}^D$, 从而有 $F(C)$ 是 $\mathcal{M}^D$ 中的一个内生成元, 故 $G(D)$ 是 $\mathcal{M}^C$ 中的一个内生成元. **证毕.**

设 X_C 是一个有限余生成 C- 余模. 于是有正合列: $0 \to X_C \to C^{(n)}$, 运用函子 F 得正合列: $0 \to F(X_C) \to F(C)^{(n)}$, 又因为存在 $N_D \in \mathcal{M}^D$ 使得 $F(C) \oplus N_D = D^{(m)}$, 故 $F\,(C)$ 一定有限余生成. 同理可证充分性成立. **证毕.**

下面的引理是自然的.

引理 11.4.1 设 $C \times_\alpha H$ 是一个交叉对偶积. 如果 $\dim H < \infty$, 则 $(C \times_\alpha H)^* \cong C^* \#_{\alpha^*} H^*$.

命题 11.4.1 (1) 设 $C \times_\alpha H$ 是一个交叉对偶积. 如果 H 和 C 都是有限维, α 是可逆 2- 上循环的, 则 $C \times_\alpha H$ 是 QcF 当且仅当 $C \times_\alpha H$ 是 QcF.

(2) 设 $C = \bigoplus_{i \in I} C_i$. 则 C 是左 QcF 当且仅当每个 C_i 是左 QcF.

证明 (1) 由于 C 是有限维, C 是 QcF 当且仅当 C^* 是 QF- 环当且仅当 $C^* \#_{\alpha^*} H^*$ 是 QF(由于 $C^* \#_{\alpha^*} H^*$ 是 C^* 的一个良扩张) 当且仅当 $(C \times_\alpha H)^*$ 是 QF 当且仅当 $C \times_\alpha H$ 是 QcF.

(2) 由于每个 C_i 是内射右 C- 余模, 于是 C_i 是一个右自由 C- 余模的直和项. 如果 C 是左 QcF, 则每个 C_i 是投射 C- 余模. 当然, 每个 C_i 也是投射右 C_i- 余模, 即每个 C_i 是左 QcF. 反之, 设每个 C_i 是左 QcF, 于是得正合列 $0 \to {}_{C^*}C_i \to {C_i^*}^{(k_i)}$(对每个 i). 因此序列 $0 \to {}_{C^*}C \to \bigoplus_{i \in I} {C_i^*}^{(k_i)} \mapsto {C^*}^{(l)}$ 正合. 故 C 是左 QcF. **证毕.**

第12章　Frobenius 代数与 Yang-Baxter 方程间的关系

在数学中，目前有三个比较活跃的领域：Hopf 代数，Yang-Baxter 方程及量子群. Hopf 代数是人们在研究拓扑群时发现的代数结构；Yang-Baxter 方程是人们在研究量子可积系统时发现的非线性方程；而量子群是数学物理中的一个研究领域. 本章介绍了 Hopf 代数的发展情况，Yang-Baxter 方程的由来和量子群的盛行. 着重指出三者之间的深刻联系. 最后，我们介绍一下 Frobenius 代数在求解 Yang-Baxter 方程上的运用.

§12.1　Hopf 代数的经典例子

Hopf 代数是代数中最活跃的研究领域之一，它是人们在研究拓扑时被发现的. 正如我们在第 9 章的前言里所介绍的那样，Hopf 代数经过半个多世纪的发展，已成为了数学的一个主要研究领域，她的理论和方法已渗透到了数学的各个领域. 在 Hopf 代数中，那些经典的例子常常令人回味无穷，下面我们就介绍几个这样的例子.

例 12.1.1　$\boldsymbol{H=kG}$, **群代数**, 这里 $\Delta x=x\otimes x$, $\varepsilon(x)=1$, $S(x)=x^{-1}$, x 为 G 中的任意元，然后作线性扩充，便得到 Hopf 代数 kG, 它是余交换的. 关于 kG, 还有很多问题没有得到解决，如零因子问题，即：设 G 为无挠的，问 kG 作为代数方面有无零因子，这个问题具有 Hilbert 所说的优秀问题的特征：“叙述起来极其简洁，论证起来又如此艰难，在数学中又极有意义”, 这个问题仍吸引着许多优秀的数学家，如 D.S.Passman 等.

例 12.1.2　$\boldsymbol{H}$ 无挠，李代数 L 的泛包络代数，这里

$$\Delta x=1\otimes x+x\otimes 1,\quad \varepsilon(x)=o,\quad S(x)=-x,$$

x 为 L 中的任意元，它也是一个余交换的 Hopf 代数.

在 Hopf 代数产生以前，上述两个例子分别属于两门独立的学科，并已有丰硕的成果. 因而 Hopf 代数可以认为是对群代数和李代数的泛包络代数统一处理后的推广，因而上述的两个例子在 Hopf 代数中极具影响. 另外，这两个具体的 Hopf 代数具有一个共性：$\Delta x=\sum x_{(1)}\otimes x_{(2)}=\sum x_{(2)}\otimes x_{(1)}$, 这样的 Hopf 代数称为 **余交换的**.

例 12.1.3 $H=(kG)^*$, 这里 G 为有限群，它为 kG 的线性对偶，设其基元素为 p_x, 我们定义： $\Delta p_x=\sum\limits_{y\in G}p_y\otimes p_{y^{-1}x}$, $\varepsilon(p_x)=y_1$, $S(p_x)=p_{x^{-1}}$, 它也是一个很要紧的 Hopf 代数，因为有结论指出，代数 A 是一个 $(kG)^*$- 模代数当且仅当 A 是 G 分次代数.

在 Hopf 代数和量子群的理论中，最重要的例子是那些非交换非余交换的 Hopf 代数.

例 12.1.4 Sweedler 4 维 Hopf 代数, 给定一个特征不为 2 的域 k, 存在着惟一的一个维数为 4 的既非余交换亦非交换的 Hopf 代数

$$H_4=k<1,g,x,gx\,|g^2=1,x^2=0,xg=-gx>.$$

余运算为

$$\Delta x=x\bigotimes 1+g\bigotimes x,\ \Delta g=g\bigotimes g,\ \varepsilon(g)=1,\ \varepsilon(x)=0,\ S(g)=g^{-1},\ S(x)=-gx.$$

这是一个非常要紧的 Hopf 代数，它是一个极小的 Braided Hopf 代数 (又叫拟三角 Hopf 代数) 的例子，后面将知道，由它我们可以构造出一系列 Yang-Baxter 方程的解.

§12.2 Braided Hopf 代数与 Yang-Baxter 方程

1967 年，在研究量子力学可积问题时，杨振宁导出了如下的矩阵方程

$$B(u)A(u)B(u+v)A(v)=B(v)A(u+v)B(u),$$

并得到了该方程的显解. 其中 $A(u)$ 及 $B(u)$ 是 u 的有理函数. 1972 年，巴克斯特在研究经典统计力学中另一个不同的可积问题即八顶角模型时，又得到了上述方程，因而把该方程称为 Yang-Baxter 方程.

Yang-Baxter 方程的数学化形式为: 设 V 是域 k 上的一个向量空间，c 为 $V\otimes V$ 的一个自同构，在 $V\otimes V\otimes V$ 的自同构群中，方程

$$(c\bigotimes id)(id\bigotimes c)(c\bigotimes id)=(id\bigotimes c)(c\bigotimes id)(id\bigotimes c)$$

本质上等价于 Yang-Baxter 方程，也称此方程为 Yang-Baxter 方程，满足上述方程的解 c 称为一个 R- 矩阵.

对上过方程稍加剖析便知道其复杂程度，设 $\{v_i\}$ 为 V 的基，从而 $\{v_i\otimes v_j\}$ 构成 $V\otimes V$ 的基，其自同构 c 可由系数 $(c_{i,j}^{k,l})_{i,j,k,l}$ 表示为

$$c(v_i\bigotimes v_j)=\sum_{k,l}c_{i,j}^{k,l}v_k\bigotimes v_l,$$

c 成为 Yang-Baxter 方程的解的充分必要条件为

$$\sum_{p,q,r,x,y,z} (c_{ij}^{pa}\delta_{kr})(\delta_{px}c_{qr}^{yz})(c_{xy}^{lm}\delta_{zn}) = \sum_{p,q,r,x,y,z} (\delta_{ip}c_{jk}^{qr})(c_{pq}^{xy}\delta_{rz})(\delta_{x\ell}c_{yz}^{mn}),$$

这个式子又等价于

$$\sum_{p,q,y} c_{ij}^{pq}c_{qk}^{yn}c_{py}^{lm} = \sum_{y,q,r} c_{jk}^{qr}c_{iq}^{ly}c_{yr}^{mn}.$$

要解这样一个非线性的方程是有极高难度的．尽管如此，在 80 年代，寻找 Yang-Baxter 方程的非平凡解获得了突破性的进展，功劳最大的应是 Drinfel'd, 他也因此工作获得了 1990 年的 Fields 奖，下面是他获奖工作的部分介绍.

12.2.1 Quantum(量子) 一余交换双代数 (Hopf 代数)

设 H 是一个双代数 (Hopf 代数), 如在 $H\otimes H$ 中存在一个可逆元 R 使得对任意的 $x\in H$ 有：

$$\Delta^{op}(x) = R\Delta x R^{-1},$$

则称 H 是一个量子余交换的双代数 (Hopf 代数), 其中 R 称为一个泛 R- 矩阵.

显然，任意余交换的双代数 (Hopf 代数) 是一个 quantum- 余交换的双代数 (Hopf 代数), 因而元素 $R\in H\otimes H$ 成为恒量一个双代数 (Hopf 代数) 余交换程度的一个量.

12.2.2 Braided 双代数 (Braided Hopf 代数)

设 (H,R) 为一个 quantum- 余交换的双代数 (Hopf 代数), 如果满足下列关系：

$$(\Delta\otimes id)(R) = R_{12}R_{23},$$

$$(id\otimes\Delta)(R) = R_{13}R_{12}\ ,$$

则称 (H,R) 为一个 Braided 双代数 (Hopf 代数) 这里

$$R=\sum s_i\otimes t_i, R_{12}=\sum s_i\otimes t_i\otimes 1,\ R_{13}=\sum s_i\otimes 1\otimes t_i,\ R_{23}=\sum 1\otimes s_i\otimes t_i.$$

Braided 双代数 (Braided Hopf 代数) 在量子群理论和 R- 矩阵理论中占据着中心的地位，有的作者又把它称为 quasi-triangular 双代数 (quasi-triangular Hopf 代数).

12.2.3 Braided 双代数的重要性质

设 (H,R) 是一个 Braided 双代数，则

(1) 泛 R- 矩阵 R 满足方程

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12},$$

并有等式：

$$(\varepsilon \otimes id)(R) = R^{-1} = (id \otimes \varepsilon)(R).$$

(2) 如果 H 具有可逆的对极映射 S, 则有；

$$(S \otimes id)(R) = R^{-1} = (id \otimes S^{-1})(R)$$

$$(S \otimes S)(R) = R.$$

12.2.4　由 Braided 双代数上的任意一个模，可构造出 Yang-Baxter 方程的一个解.

设 (H, R) 为一个 Braided 双代数， $R = \sum s_i \otimes t_i, V, W$ 是任意两个 H- 模，我们可以构造 $V \otimes W$ 到 $W \otimes V$ 的一个 H- 模映射 $c^R_{V,W}$：

$$c^R_{V,W}(v \otimes w) = \tau_{V,W}(R(v \otimes w) = \sum t_i w \otimes s_i v.$$

由条件，可证明 $c^R_{V,W}$ 是一个同构映射，对任意的三个 H- 模 (U, V, W), 我们可构造：

$$c^R_{U\otimes V,W} = (c^R_{V,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c^R_{V,W}),$$
$$c^R_{U,V\otimes W} = (id_V \otimes c^R_{V,W})(c^R_{U,V} \otimes id_W),$$

并且满足下列恒等式：

$$(c^R_{V,W} \otimes id_U)(id_V \otimes c^R_{V,W})(c^R_{U,V} \otimes id_W)$$
$$= (id_W \otimes c^R_{U,V})(c^R_{U,W} \otimes id_V)(id_U \otimes c^R_{V,W}),$$

特别地，令 $U = V = W$, 我们得到 $V \otimes V$ 的自同构 $c^R_{V,V}$ 满足 Yang-Baxter 方程，因而由 Braided 双代数上的任意一个 H- 模 V, 我们就可以构造出 Yang-Baxter 方程的解 $c^R_{V,V}$.

量子群这个概念首先是 1990 年 Fields 奖得主 Drinfel'd 在 1986 年于 Berkeley 举行的 ICM 的 1 小时报告中提出的，最初的例子有两类特殊的 Hopf 代数，一是半单李代数 L 的泛包络 Hopf 的形变 (deformation), 另一类是仿射代数群 G 的坐标环的形变. 说到底，什么是量子群呢，目前也没有一个公认的公理化定义. 数学家 Smith, S.P. 说：一个非交换非余交换的 Hopf 代数就叫做量子群. 按这个说法，我们在第一部分所给的几类 Hopf 代数只有第 4 个即 Sweedler 4 维 Hopf 代数才叫量子群. Drinfel'd 把量子群定义为非交换 Hopf 代数的谱. 他是这样引入的：它把量子空间范畴定义为非交换代数范畴的对偶，把代数 A 对应的量子空间记为 spec$A$(A 的谱), 根据他的定义， Hopf 代数与量子群这两个概念实际上也是等价的，不过后者略有些几何风味罢了.

关于量子群，有一个小花絮值得一提： 1990 年，京都 ICM 的大会报告充满了数学物理的内容，对这种严重的倾斜，有些人抱怨：“到处都是量子群，量子群，……”.

§12.3　Frobenius 代数与 Yang-Baxter 方程的解的介绍

除了 Drinfel'd 卓有成就的工作外，还有许多学者都在致力于从不同角度求解 Yang-Baxter 方程. 例如，A.A.Stolin 于 1991 年在 Math.Scand. 上连续发表了两篇论文，主要讨论了一些特殊 Lie 代数与 Yang-Baxter 方程间的关系. K. I. Beidar, Y. Fong 和 A. Stolin 在讨论 Frobenius 代数与 Yang-Baxter Equation 解的关系上做出较好的工作，这里我们对他们的工作做个简单的介绍.

我们将前面所讨论的域上的 Frobenius 代数放在一般的交换环上去讨论. 设 K 为一个具有单位元的交换环，A 是一个结合的 K- 代数. A 称为 Frobenius K- 代数，如果 A 是有限生成投射的 K- 模并且存在 $\phi \in A^* = \mathrm{Hom}(A, K)$ 使得双线性型 $B_\phi(x, y) = \phi(xy)$ 是非退化的，其中 x、$y \in A$. 类似于前面域上的情形，交换环上的李代数 L 称为 Frobenius 李代数，如果 L 是有限生成的 K- 模，并且存在 $\phi \in L^*$ 使得双线性型 $B_\phi[x, y] = \phi([xy])$ 是非退化的，$\forall x, y \in L$. 无论是在 Frobenius 代数还是在 Frobenius 李代数的情形，我们均称上述的 ϕ 为 Frobenius 同态.

类似于域的情形，也有交换环上 Frobenius 代数或 Frobenius 李代数的等价刻画. 如，对于 Frobenius 代数情形的刻画是：存在同构映射 $\psi : A \to A^*$ 使得 $B(y, x) =< \psi(x), y >$.

对于有限生成投射 K- 模 A, 设 $\{e_1, ..., e_n, f^1, ..., f^n\}$ 为 A 的有限对偶基. 如果 A 是 Frobenius 代数, 则 $\psi : A \to A^*$ 是同构的, 这时我们也称 $\{e_1, ..., e_n, e^1, ..., e^n\}$ 为其对偶基, 其中 $e^i = \psi^{-1}(f^i)$. 有了对偶基, 我们可以构造元素 $Q = \sum_1^n e_i \otimes e^i \in L \otimes L$. 这个元素是我们研究 Frobenius 代数或 Frobenius 李代数与 Yang-Baxter 方程的关键. K.I.Beidar, Y.Fong 和 A.Stolin 在 1997 年得到了下列主要结果.

定理 12.3.1　设 L 是交换环 K 上的 Frobenius 李代数，所具有的非退化双线性型为 $B : L \times L \to K$, $\{e_1, ..., e_n, e^1, ..., e^n\}$ 为 L 的对偶基，$Q = \sum_1^n e_i \otimes e^i \in L \otimes L$. 则有下列结论：

(1) $Q = \rho_L^{-1}(\psi^{-1}) = \chi_L^{-1}(id_L)$, 其中

$$\rho_L : L \bigotimes_K L \to Hom_K(M^*, M), \quad \rho_L(a \bigotimes b)(f) = f(a)b, \quad \forall a, b \in L;$$

$$\chi = \chi_L : L \bigotimes L \to End_K(M), \quad \chi(a \bigotimes b)(x) =< \psi(b), x > a = B(x, b)a;$$

(2) 元素 Q 不依赖于 L 的对偶基 $\{e_1, ..., e_n, e^1, ..., e^n\}$ 的选择；

(3) 元素 Q 满足李代数的 Yang-Baxter 方程

$$[Q^{12}, Q^{13}] + [Q^{12}, Q^{23}] + [Q^{13}, Q^{23}] = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \bigotimes b_i = -\sum_{i=1}^n b_i \bigotimes a_i$$

当且仅当 B 是斜对称的并且满足条件

$$B([x,y],z)+B([y,z],x)+B([z,x],y)=0,\quad \forall x,y,z\in L.$$

对于 Frobenius 代数 A, $\forall x\in A$, 一定存在惟一的 $x^{'}\in A$ 使得 $\phi(yx')=<\psi(x'),y>=\phi(xy)$, $\forall y\in A$. 因此，我们可以定义 $\alpha:A\to A,\alpha(x)=x'$. 易知，$\alpha$ 为代数 A 的一个自同构，称为 A 的 **Nakayama 自同构**.

定理 12.3.2 设 A 是交换环 K 上的 Frobenius 代数，其 Nakayama 自同构为 α, 对偶基为 $\{e_1,...,e_n,e^1,...,e^n\}$, 令 $Q=\sum_1^n e_i\otimes e^i\in A\otimes_K A$, 转置映射为 $T:A\otimes_K A\to A\otimes_K A$. 则有下列结论:

(1) $Q=\rho_L^{-1}(\psi^{-1})=\chi_L^{-1}(id_L)$;

(2) 元素 Q 不依赖于 L 的对偶基的选择;

(3) $(a\otimes b)Q=Q(b\otimes a)$, $\forall a,b\in A$;

(4) $\sum_{i=1}^n xe_ize^i=\sum_{i=1}^n e_ize^i\alpha(x)$, $\sum_{i=1}^n xe^iye_i=\sum_{i=1}^n e^iye_ix$, $\forall x,y,z\in A$;

(5) $Q^{12}Q^{13}=Q^{23}Q^{12}=Q^{13}Q^{23}$;

(6) 元素满足 Braid 关系:

$$Q^{12}Q^{23}Q^{12}=Q^{23}Q^{12}Q^{23};$$

(7) $R=Q^T\in End_K(A\otimes_K A)$ 为 Yang-Baxter 方程 $R^{12}R^{13}R^{23}=R^{23}R^{13}R^{12}$ 的解;

(8) $Q(A)=\{Q\in A\otimes_K A:(1\otimes a)Q=Q(a\otimes 1),\forall a\in A\}$ 是 $A\otimes_K A$ 的以 $\{Q\}$ 为基的一维自由子模.

下面的两个定理实质上利用元素 Q 给出了一类 Frobenius 代数和一类对称代数的刻画.

定理 12.3.3 设 A 是自由 K- 模并且有对偶基 $\{e_1,...,e_n,e^1,...,e^n\}$ 的 k- 代数，$Q=\sum_1^n e_i\otimes e^i\in A\otimes_K A$. 则下列条件等价:

(1) $Q^{12}Q^{13}=Q^{23}Q^{12}$;

(2) $Q^{12}Q^{13}=Q^{13}Q^{23}$;

(3) $Q^{23}Q^{12}=Q^{13}Q^{23}$;

(4) $(1\otimes a)Q=Q(a\otimes 1)$, $\forall a\in A$;

(5) A 是一个 Frobenius 代数，其 Frobenius 映射 $\phi:A\to K$ 使得 $\phi(e_ie^j)=\partial_{ij}$, $i,j=1,\cdots,n$.

定理 12.3.4 设 A 是自由 k- 模并且有对偶基 $\{e_1,\cdots,e_n,e^1,\cdots,e^n\}$ 的 k- 代数，$Q=\sum_1^n e_i\otimes e^i\in A\otimes_K A$. 则下列条件等价:

(1) $Q^{12}Q^{13}=Q^{23}Q^{12}$ 和 $Q^{12}Q^{23}=Q^{23}Q^{13}$;

(2) $Q^{12}Q^{13}=Q^{13}Q^{23}$ 和 $Q^{12}Q^{23}=Q^{13}Q^{12}$;

(3) $Q^{23}Q^{12} = Q^{13}Q^{23}$ 和 $Q^{23}Q^{13} = Q^{13}Q^{12}$;

(4) $(1 \otimes a)Q = Q(a \otimes 1)$, $\forall a \in A$;

(5) A 是一个对称代数, 其 Frobenius 映射 $\phi : A \to K$ 使得 $\phi(e_i e^j) = \partial_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, n$.

目前乃至今后相当一段时期, 从不同的数学研究对象去构造 Yang-Baxter 方程的解都是十分有意义的工作, 我们也在试图从 Frobenius 余代数和 quasi-Frobenius 余代数的角度去做.

参 考 文 献

[1] M. Auslander, D. Buchsbaum. Homological Dimension in Local Rings. Trans. AMS., 1957(85)：390～405

[2] F. W. Anderson, K. R. Fuller. Rings and Categories of Modules.2nd ed.. GTM.13, New York：Springer-Verlag, 1992

[3] P. N. Anh. Characterization of two-sided PF rings. J. Algebra, 1991(141)：316～320

[4] E. P. Armendariz, J. K. Park. Self-injective rings with restricted chain conditions. Arch. Math, 1992(58)：24～33

[5] P. Ara, W. K. Nicholson and M. F. Yousif. A look at the Faith-conjecture. Glasgow Math. J., 2001(42)：1495～1957

[6] E. P. Armendariz, Rings with dcc on essential left ideals. Comm. Algebra, 1980(8)：299～308

[7] M. Auslander and I. Reiten. On a Generalized Version of the Nakayama Conjecture. Proc. Amer. Matm. Soc., 1975(52)：69～74

[8] M. Auslander and I. Reiten. Applications to contravariantly finite subcategories. Adv. Math., 1991(86)：111～152

[9] M. Auslander and I. Reiten. k-Gorenstein algebras and syzygy. J. Pure and Appl. Algebra, 1994(92)：1～27

[10] M. Auslander, I. Reiten and O. Small. Representation theory of Artin Algbras. Cambridge University Press, 1995

[11] M. Auslander and I. Reiten. Syzygy modules for noetherian rings. J. Algebra, 1996(183)：167～185

[12] M. Auslander, Coherent functors. Proc. Conf. Categorical Algebra. New Nork：Springer, 1966

[13] G. Azumaya. Completely faithful modules and self-injective rings, Nagaya Math J., 1966(27)

[14] G. Azumaya. Report. at the summer meeting of Tokyo university of education, 1975

[15] G. Azumaya. Finite splitness and finite projectivity. J. Algebra, 1987(106)：114～134

[16] R. Baer. Rings with duals. Amer. J. Math., 1943(65)：569～584

[17] H. Bass. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. Trans. AMS., 1960(95)：466～488

[18] H. Bass. Injective dimension in Noetherian rings. Trans. AMS., 1962(102)：18～29

[19] J. A. Beachy. On quasi-attina rings. J. London Math., 1971(245)：449～452

[20] K. I. Beidar, Y. Fong & A.Stolin. On Frobenius algebras and the quantum Yang-Baxter equation. Trans. AMS, 1997, 349(9)：3823～3836

[21] J. E. Bjork. Radical properties of perfect modules. J. Reine Angew. Math., 1972(245)：78～86

[22] R. J. Blattner and S. Montgomery. A duality theorem for Hopf module algebras. J. Algebra, 1985(95)：153～172

[23] F. Bischinger, W. Muller. Left PF is not right PF rings. Comm. Algebra., 1986, 14(7)

[24] R. Brauer & C. Nesbitt. On the reqular representations of algebra. proc. Nat. Acad. Sci., 1937(23)

[25] Y. Baba and K. Oshiro. On a theorem of Fuller. J. Algebra, 1993(154)：86～94

[26] M. Bolla. Isomorphisms between endomorphism rings of prgenerators. J. Algebra, 1984(87)：261～281

[27] N. Bourbaki. " Algebra, Part I". Hernann/Addison Wesley, 1974

[28] V. Camillo. Coherence for polynomial rings. J. Algebra, 1990(132)： 72～76

[29] V. Camillo. Modules whose quotients have finite Goldie dimensiom. Pac. J. Math., 1977, 69(2)： 337～338

[30] J. L. Chen and N. Q. Ding. On general principally injective rings, Comm. Algebra, 1999, 27(5)： 2097～2116

[31] J. Clark and D. V. Huynh. A note on perfect self-injective rings. Quart. J. Math. Oxford, 1994(45)： 13～17

[32] J. Clark and D. V. Huynh. When is a self-injective semiperfect ring QF?. J. Algebra, 1994(165)： 531～542

[33] J. L. Chen. Generalized inverse of Matrices over rings (II)(in Chinese). J. Southeast Univ, 1994, 24(1)： 48～53

[34] R. R. Colby and K. R. Fuller. Exactness of the double dual and Morita duality for Grotendieck categories. J. Algebra, 1983(82)： 546～558

[35] Camillo, W. K. Nicholson and M. F. Yousif. Ikeda-Nakayama. J. Algebra, 2000(226)： 1001～1010

[36] R. R. Colby. Rings which have flat injectives. J. Algebra, 1975(35)： 239～252

[37] P. M. Cohen. " Skew field Constructions". UK： Cambridge Univ. Press. Cambridge. 1997

[38] C. W. Curtis and I. Reiner. Representation theory of finite groups and associative algebras. A Wiley-Interscience Publication. 1962

[39] R. R. Colby and E. A. Rutter. π-flat and π-projective modules. Arch. Math., 1971(22)： 246～251

[40] F. C. Cheng and M. Y. Wang. The homological properties of G-matlis dual modules over semi-local rings. Comm. Algebra, 1993, 21(4)： 1215～1220

[41] V. Camillo and Yousif. Continuous rings with acc on annihilators. Canad. Math. Bull., 1991(34)： 462～464

[42] Y. Doi, Homological coalgebra. J. Math. Soc. Japan, 1981, 33(1)： 31～50

[43] F. Dischinger and W. Müller. Left PF not right PF. Comm. Algebra, 1986(14)： 1223～1227

[44] E. E. Enochs. Injective and flat covers, envelopes and resolvents. Israel J. Math., 1981(39)： 189～209

[45] S. Eilenberg and T. Nakayama. On the dimension of modules and algebras II(Frobenius algebras and quasi-Frobenius rings). Nagoya Math. J., 1966(9)： 1～16

[46] C. Faith. Rings with ascending chain condition on annihilators. Nagoya Math. J., 1966(27)： 179～191

[47] C. Faith. Algebra II Ring Theory, Berlin： Springer-Verlag. 1976

[48] C. Faith. Self-injective rings. Proc. AMS., 1979(77)： 157～164

[49] C. Faith. Embedding modules in projiective modules, in Advances in Non-commutative Ring Theory. LNM, 1982(951)： 21～39

[50] C. Faith. Embedding torsionless modules in projective modules. Publications Mathematiques, 1990(34)： 379～387

[51] R. M. Fossum, P. A. Griffith and I. Reiten. Trivial Extensions of Abelian Categories, Lecture Notes in Mathematics 456, Berlin-Heidelberg-New York： Springer-Verlag, 1975

[52] K. R. Fuller and D. A. Hill. On quasi-projective modules via relative projectivity. Arch. Math., 1970(21)： 369～373

[53] C. Faith and P. Menal. A Counterexample to a conjecture. Proc. AMS., 1992(116)： 21～26

[54] G. Frobenius. Theorie der hyperkomplexem Grossen. Site Ber Berlin. 1903

[55] C. Faith and E. A. Walker. Direct sum representations of injective modules. J. Algebra, 1967(5)： 203～221

[56] K. R. Fuller and B. Zimmermann-Huisgen. On the generalized Nakayama conjecture and the Cartan determinant problem. Trans. AMS., 1986(294)： 679～691

[57] S. Glaz. Commutative coherent rings. Springer-Verlag. 1989

[58] I. P. Gabriel. Des categories abelianness. Bull. Soc. Math. France, 1962(90)： 323～448

[59] E. L Green, E. Kirkman, J. Kuzmanovich. Finitistic dimension of finite dimension monomial algebras. J. algebra, 1991(136)： 37～59

[60] J. L. Gomez Pardo and P. A. Guil Asensio. Essential embeddings of cyclic modules in projectives. Trans. AMS. 1997.4343～4353

[61] W. Geigle and H. Lenzing. Perpendicular categories with applications to representations and sheaves. J. Algebra, 1991(144)： 273～343

[62] K. R. Goodearl. Rings theory–Nonsingular rings and modules. Marcel Dekker New York.1976

[63] K. R. Goodearl. Von Neumann Regular Rings. Pitman, London. 1979

[64] J. L. Gomez Pardo. Embedding cyclic and torsion-free modules in free modules. Arch. Math., 1985 (44)： 503～510

[65] E. L Green, and B. Zimmermann-Huisgen. Finitistic dimension of artinian rings with vanishing radical cube. Math. Z., 1991(206)： 505～526

[66] M. Harada. On self-injective min-injective rings. Osaka J. Math., 1982(19)： 587～597

[67] D. Happel. Triangulated Categories in the Presentation Theory of Infinite Dimensional Algebras.UK： Cambridge Univ. Press Cambridge. 1988

[68] F. Dischinger and W. Muller. Left PF is not PF. Comm.. Algebra, 1986, 14(7)： 1223～1227

[69] C. R. Hajarnavis and N.C. Norton. On dual rings and their modules. J. Algebra, 1985(93)： 253～266

[70] R. G. Heyneman and D. Radford. Reflexivity and categories of finite type. J. Algebra, 1974(28)： 215～246

[71] Z.Y. Huang. Wt-approximation representations over quasi k-Gorenstein algebras. Science in China (Series A), 1999(42)： 945～956

[72] M. Ikeda and T. Nakayama. On some characteristic properties quasi-Frobenius regular rings. Proc. AMS, 1954(5)： 15～19

[73] A. Ioms. On Frobenius Lie algebras. Comm. Algebra, 1980, 8(1) 13～52

[74] K. Igusa, S. O. Smalϕ and G. Todorov. Finite projectivity and contravariant finiteness. Proc. AMS., 1990(109)： 937～941

[75] J. P. Jans. Duality in Noetherian rings. Proc. AMS., 1961(12)： 829～835

[76] N. Jacobson. Structure of Rings. MAS Colloquium, Publication, Vol.37, Providence, RI, 1964

[77] S. Jain. Flat and FP-injectivity. Proc. AMS., 1973(41)： 437～442

[78] S. K. Jain and S. R. Lopez-Permouth. Rings whose cyclics are essentially embeddable in projective modules. J. Algebra, 1990(128)： 257～269

[79] B. Johns. Annihilator conditions in Noetherian rings. J. Algebra, 1977(49)： 222～224

[80] F. Kasch. Modules and rings, London ang New York： Academic Press, 1982

[81] C. Kassel. Quantum groups, GTM 155. Springs-Verlag. 1995

[82] T. Kato. Duality of cyclic modules. Tohoku Math. J., 1967(19)： 349～356

[83] T. Kato. Torsionless Modules. Tohoku Math. J., 1968(20)： 234～243

[84] K. Koike. On self-injective semiprimary. Comm. Algebra, 2000(28)： 4303～4319

[85] T.Y.Lam. Lectures on modules and rings. GTM, vol.189, Springer-Verlag, 1998

[86] D. Lazad. Autour de la platitude. Bull. Sco. Math. France, 1969(97)： 81～128
[87] H. Lenzing. Free derivation modules on algebraic varieties. Amer. J. Math., 1965(87)：874～898
[88] I. P. Lin. Morita theorem for coalgebras. Comm. Algebra, 1974, 1(14)： 311-344
[89] I.P.Lin. Semi-perfect coalgebra. J. Algebra, 1977(49)： 357～373
[90] R. Larson and M. Sweeder. An associative orthogonal bilinear form for Hopf algebras. Amer. J. Math., 1969(91)： 75～94
[91] E. Matlis. Injective modules over prufer rings. Nagoya Math. J., 1959(15)： 57～69
[92] E. Matlis. Commutative semicoherent and semiregular rings. J. Algebra, 1985(95)： 343～372
[93] P. Menal. On the endomorphism ring of a free module. Publ. Mat. Univ. Autonoma Barcedona, 1983(27)： 141～154
[94] Y. Miyashita. Tilting modules of finite projective dimension. Math.Z., 1986(193)： 113～146
[95] J. W. Milnor and J. C. Moore. On the structure of Hopf algebras. Ann. of Math., 1965(81)： 211～264
[96] K. Morita. Duality of modules and its applications to the theory of rings with minimum condition. Sci. Rep. Kyoiku Daigaku Sect. Padova, 1989(82)： 203～231
[97] H. Mochizuki. Finitistic global dimension for rings. Pasific J. Math, 1965(15)： 249～258
[98] K. Morita. Localization in categories of modules. Math.Z., 1973(114)： 121～144
[99] S. Montgomery. Hopf algebras and their actions on rings. CBMS.1992
[100] B.L. Mueller. The classification of algebras by dominant dimenion. Canad. J. Math., 1968(20)： 398-409
[101] T． Nakayama. On Frobenius algebras. Ann. of Math, 1939, l40(3)： 611～631
[102] T. Nakayama. On Frobenius algebras. Ann. of Math, 1941, 42(2)： 1～21
[103] T. Nakayama. On algebras with Complete Homology.Hamburg： Abh. Math. Sem., Univ.1958 (22)： 300～307
[104] W. K. Nicholson. Semiregular modules and rings. Can. J. Math., 1976(28)： 1105～1120
[105] S. B. Nam, N. K. Kim and J. Y. Kim. On simple GP-injective modules. Comm. Algebra, 1995, 23(14)： 5437～5444
[106] C. Nastasescu. B. Torricillas and Y. H. Zhang. Hereditary coalgebras, Comm. Algebra. 1996, 24(4)： 1521～1528
[107] W. K. Nicholson and M. F. Yousif. Principally injective rings. J. Algebra, 1995(174)： 77～93
[108] W. K. Nicholson and M. F. Yousif. On a theorem of Camillo. Comm. Algebra, 1995, 23(14)： 5309～5314
[109] W. K. Nicholson and M. F. Yousif. On perfect simple-injective rings. Proc. AMS, 1997
[110] W. K. Nicholson and M. F. Yousif. Annihilators and the CS-condition. Glasgow Math. J., 1998, 40(2)： 213～222
[111] W. K. Nicholson and M. F. Yousif. EP-rings, Comm. Algebra, 2001(29)： 415～425
[112] W. K. Nicholson and M. F. Yousif. On quasi-Frobenius rings, in Int. Symp. Ring Theory, Eds. G. F. Birkenmeier, J. K. Park, S. Park Birkhauser, 2001. 245～277
[113] T. Onondera. Linearly compact modules and cogenerators. J. Fac. Sci. Hokkaido U. Ser., 1972(122)： 116～125
[114] T. Onodera. Codominand dimensions and Morita equivalences. Hokkaido Math. J., 1997(6)： 169～182
[115] B. L. Osofsky. A generalization of QF rings. J. Algebra., 1966(14)： 373～383
[116] B. L. Osofsky. A semi-perfect one-sided injective ring. Comm. Algebra, 1984, 12(16)： 2037～2041

[117] J. L. G. Pardo and A. G. Asensio. Morita equivalence for Grothendieck categories. Publications Mathematiques, 1992(36) : 625~635

[118] J. L. G. Pardo and A. G. Asensio. Endomorphism rings of completely pure-injective modules. Proc.AMS., 1996(124) : 2301~2309

[119] J. L. G. Pardo and A. G. Asensio. Essential embedding of cyclic modules in projectives. Trans. AMS, 1997(349) : 4343~4353

[120] J. L. G. Pardo and A. G. Asensio. Rings with finite essential socle. Proc. AMS, 1997, 125(4) : 971~977

[121] J. L. G. Pardo and A. G. Asensio. Embeddings in free modules and artinian rings.J. Algebra, 1997(198) : 608~617

[122] J. L. G. Pardo and N. R. Gonzalez. On some properties of IF-rings. Questiones Arithmeticae, 1983(5) : 395~405

[123] J. L. G. Pardo. Embeddding cyclic and torsion-free modules in free modules. Arch. Math., 1985(44) ; 503~510

[124] D. E. Radford. Coreflexive coalgebras. J. Algebra, 1973(26) : 512~535

[125] M.B.Rege. On von Neumann regular rings and SF-rings. Math. Japonica, 1986, 31(6) : 927~936

[126] M. Reynuaud. L. Gruson, Criteres de platitude et de projectivite. Invent. Math., 1971(13) ; 1~89

[127] J. J. Rotman. An introduction to homological algebra. Nem York, San Francisco, London ; Academic Press Inc. 1979

[128] J. Rada and M. Saorin. On two open problems about embedding of modules in free modules. Comm. Algebra, 1999, 27(1) ; 105~118

[129] J. Rada and M. Saorin. On semiregular rings whose finitely generated modules embed in free modules. Canad. Math. Bull., 1997, 40(2) : 221~230

[130] E. A. Rutter. Rings with the principal extension property. Comm. Algebra, 1975, 3(3) : 203~212

[131] L. W. Small. A change f rings theorem. Proc. AMS, 1968(19) : 662~666

[132] D. Stefen. The uniqueness of integrals. Comm. Algebra, 1995, 23(5) 1657~1662

[133] B. Stenstrom. Rings of quotients.Berlin : Springer-Verlag, 1975

[134] A. Stolin. Rational solutious of the classical Yang-Baxter equation and QF Lie algebras. J. Pure and Applied Algebras, 1999(137) : 285~293

[135] J. Sullivan. The uniqueness of integrals for Hopf algebras and some existence theorems of integrals for commutative Hopf algebras. J. Algebra, 1971(19) : 426~440

[136] J. Sullivan. Affine group schemes with integrals. J. Algebra, 1972(22) : 546~558

[137] M.E.Sweedler. Integrals for Hopf algebras. Ann.of Mathematics, 1969(89) : 323~335

[138] M. E. Sweedler. Hopf algebras.New York : Benjamin, 1969

[139] H. Tachikawa. Quasi-Frobenius rings and Generalization. QF-3 and QF-1 Rings, LNM.351, Springer-Verlag. 1973

[140] H. Tachikawa. a characterazition of QF-3 Algbras. Proc. AMS, 1962(13) : 701~703

[141] H. Tachikawa. On dominant dimension of QF-3 algebras. Trans. AMS., 1964(112) : 249~266

[142] M. Takeuchi. Morita theorems for categories of comodules. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec.IA Math., 1977(24) : 629~644

[143] R.M. Thrall. Some generalization of quasi-Frobenius algebras. Trans. AMS., 1948(64) : 173~183

[144] J. G. Torrellas and C.Nastasescu. Quasi-Frobenius coalgebras. J. Algebra, 1995(174)：909∼923

[145] T. S. Tol'skaja. When are all cyclic modules essentially embedded in free modules. Mat. Issled, 1970(5)： 187∼192

[146] B.Torrecillas. F.Van Oystaeyen and Y. H. Zhang. the Brauer groups of a cocommutative coalgebra. J. Algebra, 1995(177)： 536∼568

[147] Y. Utumi. On continuous rings and self-injective rings. Trans. AMS., 1965(118)： 158∼173

[148] Y. Utumi. On continuity and Self-injectivity of a compete regular ring. Canad. J. Math., 1966(18)： 404∼412

[149] Y. Utumi. Self-injective rings. J. Algebra, 1967(6)： 56∼64

[150] M. Y. Wang. Some studies on π-coherent rings. Proc. AMS, 1993(119)， 71∼76

[151] M.Y.Wang. the projective and injective of finitely generated flat modules. Chinese Ann. of Mathematics,1995, 16(A)： 681∼685

[152] M. Y. Wang. Some Co-hom Functors and Classical tilting comodules. SEA Bull.Math.,1998, 22(4)； 455∼468

[153] M. Y. Wang. Tilting comodules over semi-perfect coalgebras. Algebra Colloquium, 1999, 6(1)： 461∼472

[154] M. Y. Wang. QcF-coalgebras. SEAMS, 2004(28)： 129∼135

[155] G. Wilson. The Cartan map on categories of graded modules. J. Algebra, 1983(85)； 390∼398

[156] A. Wiedemann. Integral cersoin of the Nakayama and finitistic dimension conjecture. J. Algebra, 1994(170)： 388∼399

[157] R. Wisbauer. Grundlagen der module-und Ring theorie. Fisher, Munich(in German).1988

[158] J. A. Wood. Duality for modules over finite rings and applications to coding. Preprint. 1997

[159] Uber absolute reine rings. J. Reine U. Angew. Math, 1973(262/263)： 381∼391

[160] M. Y. Wang and Z. X. Wu. Conoetherian coalgebras. Algebra Colloquium, 1998, 5(1)：117∼120

[161] Z. X. Wu and M. Y. Wang. Some characteristics of QF-rings. Chinese Annals of Mathematics, 1998,19(A)： 379∼384

[162] M. Y. Wang and Y. H. Xu. *-module, co-*-modules and cotilting modules over Noetherian rings. Science in China, 1996, 39(1)： 48∼55

[163] M. Y. Wang and Z. H. Yu. Embedding modules in projectives. Chinese Annals of Mathematics, 1997, 18(A)： 1∼4

[164] R. Wisbauer. M. F. Yousif and Y. Zhou, Ikeda-Nakayama modules. Contributions to Algebra and Geometry, 2002. 43

[165] C. C. Xi. On the finitistic dimension conjecture I: related to representation- finite algebras. J. Pure and Appl. Alg., 2004(193)： 287∼305

[166] W. M. Xue. Rings with Morita Duality. LNM, 1992. 1523

[167] W. M. Xue. A note on perfect self-injective rings. Comm. Algebra, 1996, 24(2)： 749∼755

[168] W. M. Xue. A note on principally injective rings. Comm. Algebra, 1998, 26(12)： 4187∼4190

[169] Yamagata. Frobenius algebras. Handbook of Algebra I, Edited by M. Hazewinkel, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1996. 841∼887

[170] M. F. Yousif. On continuous rings. J. Algebra, 1997(191)： 495∼509

[171] R. Yue Chi Ming. On regular rings and self-injective rings I. Glasnik Mat., 1983, 18(38)： 221∼229

[172] R. Yue Chi Ming. On Regular and Artinian Rings (II).Riv. Mat Univ.Parma., 1985, 11(4)； 101∼109

[173] R. Yue Chi Ming. On von Neumann regular rings XI. Bull. Math. Sci. Math. R. S. Roumanie, 1986, 30(78) : 371~379

[174] R. Yue Chi Ming. On annihilator ideals IV. Bull. Math. Sci. Math. R. S. Roumanie, 1986, 30(78) : 371~379

[175] R. Yue Chi Ming. On injective and p-injectivity. J. Math. Kyoto Univ., 1987(27) : 439~452

[176] R. Yue Chi Ming. On Annihilator Ideals IV. Riv. Mat. Univ. Parmar., 1987, 13(4) : 19~27

[177] R. Yue Chi Ming. On p-injectivity and Generalizations Riv. Mat. Univ. Parma., 1996, 5(5) : 183~188

[178] R. Yue Chi Ming. A Note on YJ-injectiveity. Demonstratio Math., 1997(30) ; 551~556

[179] D. Zacharial. Graded artin algebras rational series. and bounds for homological dimensions, J. Algebra, 1987(106) : 476~483

[180] B.Zimmermann Huisgen. Endomorphism rings of self-generators. Pac. J. Math, 1975(61) : 587~602

[181] S. Zhu. On rings over which every flat left modules is finitely projective. J. Algebra, 1991(139) : 311~321

[182] 丘成桐，刘兆玄，甘幼评译. 20 世纪最伟大的物理学家 —— 杨振宁. 桂林：广西师范大学出版社. 1996

[183] 陈建龙. 环的正则性与 QF 环的研究. 哈尔滨： 哈尔滨工业大学博士学位论文. 2001

[184] D. Herbera and A. Shamsuddin. On self-injective perfect rings. Canad. Math. Bull. 1996, 39(1) : 55~58

后记　一些未解决的公开问题

大家知道，数学同其他自然科学一样，都是在“提出问题、解决问题、再提出新的问题”的道路上前进的. 著名的数学大师 D. Hilbert 曾经指出：一个好的问题需要具备两个标准，一是叙述起来极其简明，二是解决起来又有极高的难度. 其简明性能引起很多人的兴趣，其高难度性能体现出数学的真正魅力. 在本书的最后，我们就本着这个原则来罗列一些与本书有关的而未解决的公开问题，供读者参考.

下面三个问题来源于本书的第 2 章.

问题 1 Nakayama 猜想(参见第 2 章猜想 2.3.2)　设 A 是域 k 上的有限维代数，并且其控制维数 $dom.\dim A=\infty$, 则 A 为 quasi-Frobenius 代数.

关于有限维数有下面的著名的有限维数猜想，它是由 Rosenberg-Zelinsky 于上世纪 50 年代首先对域上有限维代数提出的 (见文献 [17]) .

问题 2 (参见第 2 章猜想 2.3.5)　设 A 为 Artin 代数, 则其左有限维数 $lFPD(A)$ $<\infty$

由有限维数猜想还可以推出下面的强 Nakayama 猜想 (见文献 [10], 文献 [169]) .

问题 3 (参见第 2 章猜想 2.3.6)　设 A 为一个 Artin 代数，$_AM$ 为非零左 A-模. 如果对任意 n 都有 $Ext_A^n(_AM,_AA)=0$ 成立，则 $_AM=0$.

在本书的第 4 章，我们讨论了 QF- 环的一个十分自然的真推广：IF- 环即内射模均为平坦模的环类. 下面是与之有关的问题.

问题 4　作者的一个研究生李珊珊将平坦模的概念进行了推广，引入了所谓 p - 平坦模. 如果结合第 4 章有关 IF- 环类的思想，考虑每个内射模均为 p - 平坦的环类，那也是能够得到一些很有趣的结果的. 另外，我们在第 6 章对内射性也做了各种各样的推广，再结合 IF- 环的思路，还可以做更多的讨论.

问题 5　第 5 章主要讨论的是自内射环在一些限制链条件的约束下等价于 QF- 环，而第 6 章，我们给出了自内射性的种种真推广，自然会问，这些广义自内射性在这些限制链条件的约束下的环类是否也等价于 QF- 环呢？

问题 6　在第 6 章的最后一节我们介绍了 FGT- 内射性，也提及了 CT - 内射性. 试问：CT- 内射性是 FGT- 内射性的真推广吗？

问题 7　环 R 称为右 (左)quasi-perfect 环, 如果每个有限生成的平坦右 (左)R-模投射. 这也是一类被广泛研究的环类 (见文献 [151] 及其参考文献) . 在这个概念的启发下，我们在文献 [151] 引入了 $FGFI$- 环和 $FGFPI$- 环的概念. 环 R 称为右(左)$FGFI$- 环，如果每个有限生成平坦右 (左)R- 模内射. 环 R 称为右 (左)$FGFPI$-环，如果每个有限生成平坦右 (左)R- 模既投射又内射. 怎样用环的理想去刻划这些环类肯定是值得关注的问题之一；关于这些环类的分类问题也是值得关注的 (文献 [151] 对 $FGFPI$- 环只做了一个初步的分类) ；是否存在单边的 quasi-perfect- 环

和单边的 *FGFI*- 环也是一个悬而未决的问题.

我们列出与第 8 章所述的三个著名猜想有关的猜想. 应该说, 这方面的问题很多, 不同的学者可以从自己的研究兴趣出发, 提出关于 *QF*- 环的问题. 我们从中选择一些.

问题 8　陈建龙在其博士学位论文中提出这样一个问题, 即如果 R 为右 *CF*-环, 满足下列条件之一, 那么 R 是否是右 Artin- 环?

(1) $R/J(R)$ 为正则环, 且 $J(R)$ 为右 T- 幂零的;

(2) R 为左完全环;

(3) R 为左凝聚环;

(4) R 为左自内射;

问题 9　C. Fath 在文献 [50] 中问: 如果 R 为右 *FGF* 右余生成元环, R 是否是 *QF*- 环? 我们能够证明右 coherent 右 *FGF*- 环为 *QF*- 环, 我们也能证明右 *FGF*-环为左 π-coherent 环.
因此, 如果我们能证明此时的环为右 coherent 环, 或右余生成元环的左 π-coherent 环为右 cohenent 环即可.

问题 10　C. Fath 在文献 [50] 中问: 能否给出 π-coherent 环的内刻画. 我们在文献 [150] 中引入了环的 W- 理想的概念, 证明了 “环 R 为右 π-coherent 环当且仅当每个右 W- 理想为有限生成”. 我们知道, W- 理想是对有限生成理想与零化子理想的一个统一推广, 但环中除了这两类理想是 W- 理想外, 还有其他形式的 W-理想. 试问: 怎样描述其他类型的 W- 理想.

问题 11　薛卫民在文献 [167] 问: 右完全右自内射环是否为右 *PF*- 环? 关于这个问题, D. Herbera 和 A. Shamsuddin 在文献 [183] 中指出这类环必为 *PF*- 环. 我们认为他们是将 Y. Utumi 在文献 [149] 中证明的 “左完全右自内射环为右 *PF*-环” 的条件记混了.

问题 12　设 R 为右 Johns 环, 如果 R 满足如下条件之一, 那么 R 是否为右 Artin 环?

(1) R 为左伪凝聚环;

(2) 对任意有限生成真左理想 $I, lr(I)$ 非零.

下面这个问题来源于第 9 章.

问题 13　在第 9 章我们给出了 Frobenius 代数 A 与 Smash 积 $A\#H$ 间的关系. 同样地我们问类似的关系对于 quasi-Frobenius 代数是否成立, 即命题 “如果 A 是一个 H- 模代数, 其中 H 是一个有限维 Hopf 代数, 则 Smash 积 $A\#H$ 是 quasi-Frobenius 当且仅当 A 是 quasi-Frobenius ” 是否成立.

下面这个问题来源于第 10 章.

问题 14　一个代数 A 是左 (右) 完全当且仅当每个左 (右)A- 模都有一个投射

盖. I.P.Lin 在文献 [89] 中证明了余代数 C 是左和右半完全当且仅当每个右 C- 余模和每个左 C- 余模都有一个投射盖. 但我们不知道一个左 (右) 半完全余代数是否意味着每个左 (右)C- 余模有一个投射盖.

下面的问题来源于本书的第 11 章.

我们知道, 如果 C 是左 QcF 余代数, 则 C^* 是右自内射环. 由引理 11.1.2 知 ${}_{C^*}C$ 是平坦模且 ${}_{C^*}C$ 是无挠的. 故我们问

问题 15　命题 11.1.1(2) 的逆命题是否成立? 即条件 "C 是一个左 QcF- 余代数" 能否推出每个平坦左 C^*- 模无挠?

显然, 在有限维的情况下, 上面的问题是肯定成立的, 因为此时 C^* 是 QF- 环, 任意平坦模均是投射的.

问题 16　如果 C^* 是 QF- 环, 则 C^* 是右自内射环. 于是由引理 11.1.2 知 ${}_{C^*}C$ 平坦. 又因为 C^* 是 QF- 环, 从而 ${}_{C^*}C$ 必为投射的即 C 是左 QcF 余代数. 当然 C 为左半完全余代数, 从而我们知道 $({}_{C^*}C^*)^0$ 在 C^* 中稠密, 于是我们问: 如果 C^* 是 QF- 环, $({}_{C^*}C^*)^0$ 是否是 QcF 余代数?

问题 17　我们在第 12 章中, 介绍了 quasi-Frobenius 代数与构造 Yang-Baxter 方程解的关系. 我们自然会问: quasi-Frobenius 余代数和 Frobenius 余代数在构造 Yang-Baxter 方程解方面是否也有作为?

名 词 索 引

Z

《现代数学基础丛书》出版书目

（按初版时间排序）

1 数理逻辑基础（上册） 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论（上册） 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础（下册） 1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造（上册） 1982.11 张远达 著
9 有限群构造（下册） 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论（上册） 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论（上册） 1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论（下册） 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著

31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著
32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论（下册） 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲、马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著